FUNCIONES

A. Introducción teórica

B. Ejercicios resueltos

A. Introducción teórica

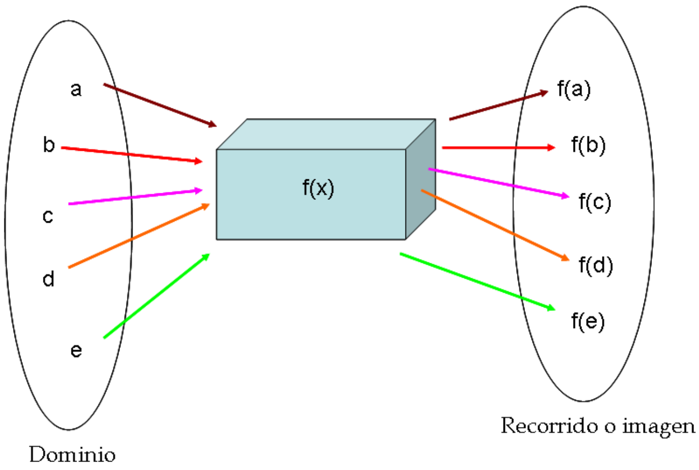
A.1. Definición de función

Una función es una relación entre dos variables numéricas, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un solo valor de y. La variable x se llama variable independiente. La variable y se llama variable dependiente

A.2. Dominio y recorrido de una función, f(x)

Se llama dominio de una función f(x) a todos los valores de x para los que f(x) existe. El dominio se denota como Dom(f)

Se llama recorrido o imagen de una función f(x) a todos los valores que puede tomar f(x). La imagen se denota como Im(f)



A.3. Crecimiento y decrecimiento de una función en un intervalo

Una función f(x) es creciente en un intervalo (a,b) cuando para dos puntos cualquiera x_1 y x_2 pertenecientes a (a,b) tales que $x_1 < x_2$ se cumple:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Una función f(x) es decreciente en un intervalo (a,b) cuando para dos puntos cualquiera x_1 y x_2 pertenecientes a (a,b) tales que $x_1 < x_2$ se cumple:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

A.4. Funciones polinómicas

a) Función polinómica de grado uno: es de la forma y=ax+b

Para representarlas se siguen los siguiente pasos:

- Hacemos una tabla de valores.
- A partir de ella extraemos dos puntos.
- Representamos los puntos en un plano cartesiano.

b) Función polinómica de grado dos: es de la forma y= ax^2+bx+c

Para representarlas se siguen los siguiente pasos:

- Obtención de los puntos de corte con el eje x:
Se obtienen a partir de la condición y=0. En ese caso:

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x=x_1 \\ x=x_2 \end{cases}$$

- Obtención de las coordenadas del vértice:

  Están dadas por $x=-\frac{b}{2a}$; $y=\frac{-b^2+4ac}{4a}$.

- Orientación de la parábola:
  Si a>0, entonces la parábola es cóncava hacia arriba, mientras que si a<0 la parábola es cóncava hacia abajo.

- Obtención del punto de corte con el eje y:

  Está dado por la condición x=0. En ese caso, $y=ax^2+bx+c \Rightarrow y=c$

A.5. Otros tipos de funciones

a) Funciones exponenciales: son de la forma $y=a^x$.
b) Funciones de proporcionalidad inversa: son de la forma $y=\frac{a}{x+b}$
c) Funciones radicales: $y=a\sqrt{\pm x+b}$
d) Funciones logarítmicas: $y=\log_a x$, con $a>0$

A.6. Composición de funciones

Sean dos funciones f(x) y g(x). La composición de f con g se define como $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$

A.7. Función inversa:

Sea la función $f(x)$. La inversa de $f(x)$ se define como $f^{-1}(x)$. Para hallar la inversa hay que dar una serie de pasos:

a) Estudiamos si f es inyectiva, es decir si la función f toma valores distintos para puntos distintos:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

b) En la ecuación $y = f(x)$ despejamos la variable x.

c) Finalmente intercambiamos la variable x por la y para obtener $f^{-1}(x)$.

B. Ejercicios resueltos

B.1. Estudia el dominio de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero. Dicho de otro modo, la función existe para todos los valores de x para los que el denominador es distinto de cero. En notación matemática:

$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x+2 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq -2$, en donde el símbolo "/" significa "tal que"

2. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función existe para los valores de x que hacen que el radicando sea mayor o igual que cero. En notación matemática:

$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 4 \geq 0$, en donde el símbolo "/" significa "tal que".

Tenemos que resolver la inecuación $x^2 - 4 \geq 0$.

- Resolvemos la ecuación correspondiente:

  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$

- Llevamos las raíces sobre la recta de los números reales:

- Ahora estudiamos el comportamiento de $x^2 - 4 \geq 0$ en las tres zonas que determinan las dos raíces:

  Zona 1:

  Tomamos un x cualquiera de $\mathbb{R}$ comprendido entre $-\infty$ y -2, incluido éste, o lo que es lo mismo en notación matemática: elegimos un $x \in (-\infty, 2]$.

  Así, para x=-3 tenemos que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow (-3)^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$, lo cual es cierto. Entonces en este intervalo tenemos una solución.

  Zona 2:

  Tomamos un $x \in (-2, 2)$, por ejemplo el cero. Así, para x=0 tenemos que $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 0^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow -4 \geq 0$, lo cual no es cierto. Entonces en este intervalo no hay solución.

  Zona 3:

  Tomamos un $x \in [2, \infty)$, por ejemplo x=3. Así, $x^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 3^2 - 4 \geq 0 \Rightarrow 5 \geq 0$, lo cual si es cierto. Ello quiere decir que el intervalo estudiado es una solución de la inecuación.

Conclusión final:

$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x \leq -2 \text{ y } x \geq 2$,
y gráficamente:

3. $f(x) = \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$

<u>Solución:</u>

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido cuando el denominador es cero o cuando el radicando es menor que cero.

Así:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0$

La solución de $x^2 + x - 2 \geq 0$ viene dada por $(-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

Entonces,
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / x^2 + x - 2 \geq 0 \Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -2] \cup [1, \infty)$

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{x^2 + x + 18}$

Solución:

El Dom(f) está dado por el conjunto de los valores de x para los que f(x) existe. Esta función no tiene sentido en los siguientes casos:

a) El radicando que aparece en el numerador es negativo.
b) El denominador es cero.

Es decir:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq 0 \ \cup \ x^2 + x + 18 \neq 0,$

tal que:
- $2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow (-\infty, 2]$
- $x^2 + x + 18 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq -9 \end{cases}$

Conclusión:
$\mathrm{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} / (-\infty, -9) \ \cup (-9, -1) \ \cup (-1, 2)$

B.2. Halla la inversa de cada una de las siguientes funciones

5. $f(x) = 5x - 2$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 - 2 = 5x_2 - 2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y=5x-2$ y cambiamos x por y:
$x=5y-2$

Ahora despejamos y:
$x=5y-2 \Rightarrow y=\dfrac{x+2}{5}$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:
$f^{-1}(x)=\dfrac{x+2}{5}$

6. $f(x)=x^2-2$

<u>Solución:</u>

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1^2-2=x_2^2-2 \Rightarrow x_1=x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y=x^2-2$ y cambiamos x por y:
$x=y^2-2$

Ahora despejamos y:
$x=y^2-2 \Rightarrow y=\sqrt{x+2}$

Por último, hacemos el cambio $y \equiv f^{-1}(x)$:
$f^{-1}(x)=\sqrt{x+2}$

7. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$

<u>Solución:</u>

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \dfrac{2x_1+3}{x_1-1}=\dfrac{2x_2+3}{x_2-1} \Rightarrow x_1=x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ y cambiamos x por y:

$$x=\frac{2y+3}{y-1}$$

Ahora despejamos y:

$$x=\frac{2y+3}{y-1}\Rightarrow y=\frac{x+3}{x-2}$$

Por último, hacemos el cambio $y\equiv f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+3}{x-2}$$

8. $f(x)=\sqrt[3]{x-4}$

Solución:

Primero comprobamos que la función es inyectiva:

$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\sqrt[3]{x_1-4}=\sqrt[3]{x_2-4}\Rightarrow x_1=x_2$. Así que es inyectiva, por lo que tendrá inversa.

Escribimos la función como $y=\sqrt[3]{x-4}$ y cambiamos x por y:

$$x=\sqrt[3]{y-4}$$

Ahora despejamos y:

$$x=\sqrt[3]{y-4}\Rightarrow y=x^3+4$$

Por último, hacemos el cambio $y\equiv f^{-1}(x)$:

$$f^{-1}(x)=x^3+4$$

B.3. Halla la variación y la tasa de variación media de cada una de las siguientes funciones

9. $f(x)=5x-2$ en el intervalo $[-3,0]$

Solución:

a) La variación viene dada por :
$f(b)-f(a)=f(0)-f(-3)=5\cdot 0-2-(5(-3)-2)=-19$

b) La tasa de variación media viene dada por $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{-19}{3}=-\dfrac{19}{3}$

10. $f(x)=x^2-2$ en el intervalo $[-1,2]$

Solución:

a) La variación viene dada por
$f(b)-f(a)=f(2)-f(-1)=0^2-2-\left(2^2-2\right)=-4$

b) La tasa de variación media viene dada por:
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{-4}{2-(-1)}=-\dfrac{4}{3}$

11. $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ en el intervalo $[0,4]$

Solución:

a) La variación viene dada por :
$f(b)-f(a)=f(4)-f(0)=\dfrac{2\cdot 4+3}{4-1}-\dfrac{0+3}{0-1}=\dfrac{20}{3}$

b) La tasa de variación media viene dada por $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\frac{20}{3}}{4}=\dfrac{5}{3}$

12. $f(x)=\sqrt{x-4}$ en el intervalo $[4,5]$

Solución:

a) La variación viene dada por:
$f(b)-f(a)=f(5)-f(4)=\sqrt{5-4}-\sqrt{4-4}=1$

b) La tasa de variación media viene dada por $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{1}{1}=1$

B.4. Estudia la simetría de cada una de las siguientes funciones

13. $f(x)=x^4+x^2$

Solución:

- La simetría de una función puede ser:

  b) Par o simétrica respecto al eje OY, cuando se cumple que $f(x)=f(-x)$

c) Impar o simétrica respecto al origen, cuando se cumple que $-f(x)=f(-x)$

d) No tener simetría, si no se dan ninguno de los dos casos anteriores.

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow x^4+x^2=(-x)^4+(-x)^2\Rightarrow x^4+x^2=x^4+x^2$.

Conclusión:

La simetría es par. No hace falta seguir con el estudio, ya que las funciones no pueden tener dos tipos de simetría.

14. $f(x)=x^3-x$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow x^3-x=(-x)^3-(-x)\Rightarrow x^3-x\neq -x^3+x$. Conclusión: La simetría no es par.

- Estudio de la simetría impar:

$-f(x)=f(-x)\Rightarrow -x^3+x=(-x)^3-(-x)\Rightarrow -x^3+x=-x^3+x$. Conclusión: La simetría es impar.

15. $f(x)=\dfrac{1}{2x-1}$

Solución:

- Estudio de la simetría par:

$f(x)=f(-x)\Rightarrow \dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2(-x)-1}\Rightarrow \dfrac{1}{2x-1}\neq\dfrac{1}{-2x-1}$, luego la simetría no es par.

- Estudio de la simetría impar:

$-f(x)=f(-x)\Rightarrow -\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{1}{2(-x)-1}\Rightarrow \dfrac{1}{-2x+1}\neq\dfrac{1}{-2x-1}$, luego la simetría no es impar.

- conclusión final: La función no tiene simetría.

B.5. Representa cada una de las siguientes funciones

16. $y = 2x$

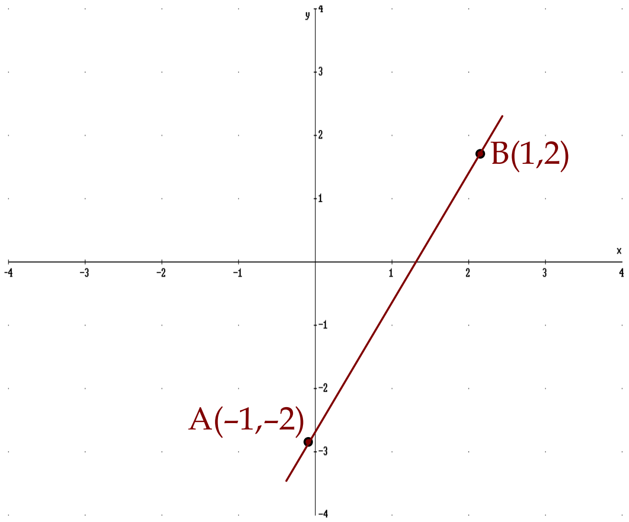
Solución:

La función dada se trata de una linea recta, ya que es de la forma y = mx+n, en dónde m es la pendiente. En nuestro caso, m=2 y n=0. Como n=0 ello quiere decir que la recta cortará al eje y en y=0.

Hacemos una tabla de valores para y=2x

x	y=2x	
–1	2(–1)=–2	$\Rightarrow$ A(–1,–2)
1	$2\cdot 1=2$	$\Rightarrow$ B(1,2)

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



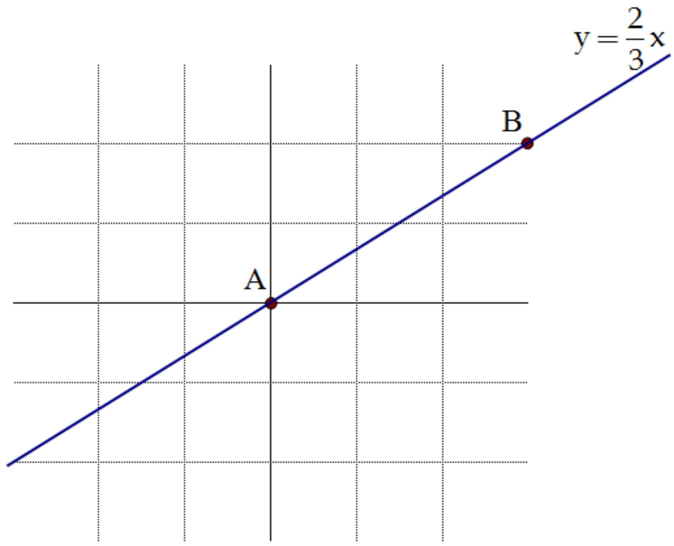
17. $y = \dfrac{2x}{3}$

Solución:

- La función $y = \dfrac{2x}{3}$ se puede escribir también así: $y = \dfrac{2}{3}x$, o si lo prefieres de esta otra forma: $y = 0,67x$
- Ahora, como siempre en estos casos, construimos una tabla de valores para obtener dos puntos (para dibujar una línea recta no hacen falta más puntos):

x	$y=\frac{2}{3}x$	
0	0	$\Rightarrow A(0,0)$
3	2	$\Rightarrow B(3,2)$

- Por último, representamos los dos puntos en un plano cartesiano y por ellos trazamos la línea recta que buscamos:



18. $y=-2x+3$

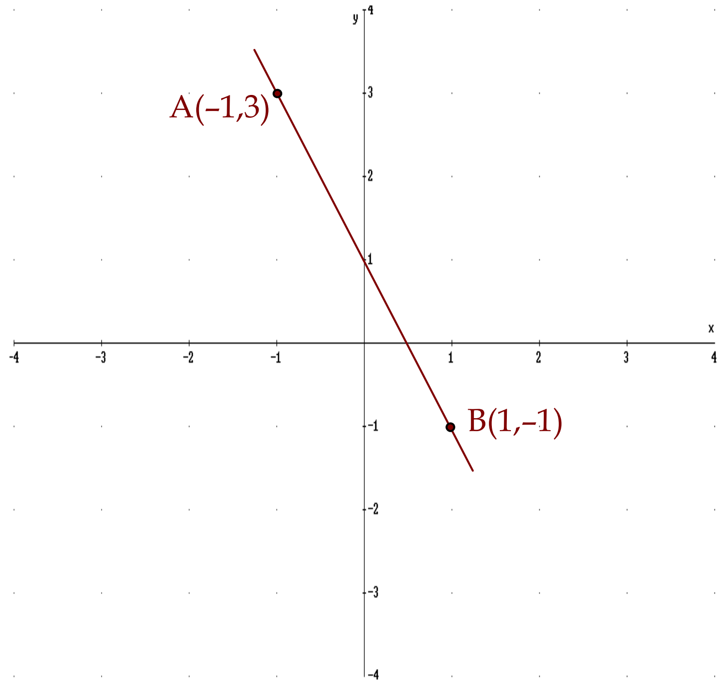
Solución:

La función dada es una línea recta, ya que es de la forma y = mx+n, en dónde m es la pendiente. En nuestro caso, m=–2 y n=1. Como n=1 ello quiere decir que la recta cortará al eje y en y=1.

Hacemos una tabla de valores para y=–2x+1

x	y=–2x+1	
–1	–2(–1)+1=3	$\Rightarrow$ A(–1,3)
1	$-2\cdot 1+1=-1$	$\Rightarrow$ B(1,–1)

Ahora representamos los dos puntos sobre el plano cartesiano:



19. Representa la siguiente función definida a trozos. Estudia también la continuidad, el crecimiento, decrecimiento y los máximos y mínimos de cada una de ellas.

$$f(x)=\begin{cases} x-3, \ -\infty < x \le 0 \\ 2, \ 0 < x < 3 \\ -x, \ 3 \le x < \infty \end{cases}$$

<u>Solución</u>:

El domino de f(x) tiene tres zonas, para una de las cuales corresponde un trazado distinto:

- Para la primera zona, $-\infty < x \le 0$, construimos una tabla de valores con el fin de obtener dos puntos. No necesitamos más puntos, ya que en el presente tramo la función es una línea recta, $f_1(x) = x - 3$

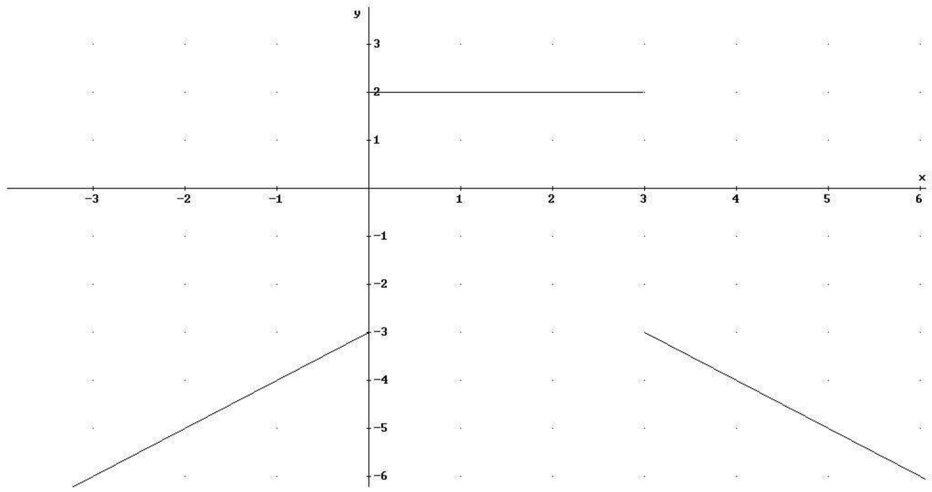
x	x–3	
0	0–3=–3	$\Rightarrow$ A(0,–3)
–2	–2–3=–5	$\Rightarrow$ B(–2,–5)

- Para la segunda zona, $0 < x < 3$, el valor de la función es constante, $f_2(x) = 2$

- Para la tercera zona, $3 \leq x < \infty$, construimos una tabla de valores con el fin de obtener dos puntos. No necesitamos más puntos ya que este tercer tramo se trata de otra recta, $f_3(x) = -x$

x	–x	
3	–3	⇒ D(3,–3)
5	–5	⇒ E(5,–5)

- Sólo nos queda representar los puntos obtenidos:



20. Representa la siguiente función cuadrática: $y = x^2 - 5x + 6$

<u>Solución</u>:

- **Los puntos de corte con el eje x:**
  Se obtienen a partir de la condición y=0. En ese caso:

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

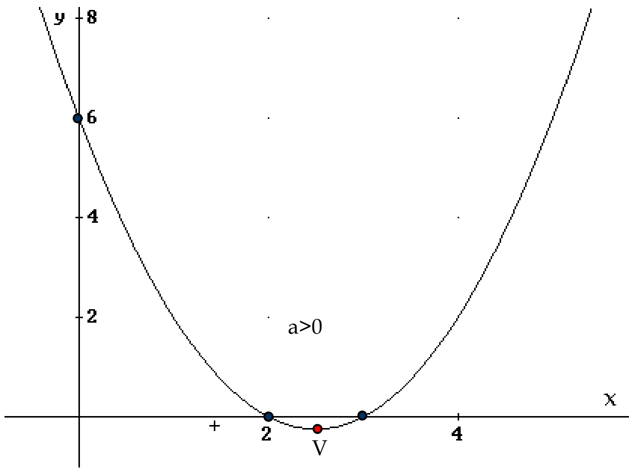
- **Las coordenadas del vértice:**
  Están dadas por $x = -\frac{b}{2a}$; $y = \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}$. Sustituyendo los valores de a y b en estas expresiones obtenemos:

$x=-\frac{(-5)}{2}$; $y=\frac{-(-5)^2+4\cdot 1\cdot 6}{4\cdot 1^2} \Rightarrow x=\frac{5}{2}$; $y=-\frac{1}{4}$, que vamos a expresar como $V\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right)$

- **Orientación de la parábola:**
  Como a>0, entonces la parábola es cóncava hacia arriba.

- **El punto de corte con el eje y:**
  Está dado por la condición x=0. En nuestro caso, cuando x=0 se tiene que y=6.

- **Representación gráfica:**
  plano cartesiano los puntos que hemos conseguido y unirlos.

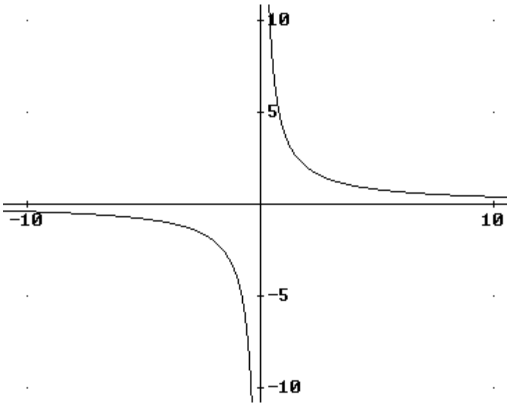


21. $y=\frac{4}{x}+3$

<u>Solución</u>:

Para representar esta parábola hay que dar los siguientes pasos:

a) Paso uno:
Tenemos que saber dibujar $f(x)=\frac{4}{x}$, que es una función de proporcionalidad inversa cuya forma es la que sigue:



b) Paso dos:

$y=\frac{4}{x}+3$, es la anterior función pero desplazada 3 unidades verticales positivas: