LECCIÓN CONDENSADA

9.1

Resolución de ecuaciones cuadráticas

En esta lección

- verás las **funciones cuadráticas** que modelan el **movimiento de proyectiles**
- usarás tablas y gráficas para aproximar soluciones a las **ecuaciones cuadráticas**
- **resolverás ecuaciones cuadráticas** deshaciendo el orden de las operaciones

Cuando un objeto se proyecta verticalmente al aire, su posición en cualquier momento depende de su altura inicial, su velocidad inicial, y la fuerza de gravedad. Si graficas la altura del objeto en cada instante, la gráfica resultante es una parábola. Lee el Ejemplo A en tu libro y observa la gráfica de la altura de una pelota de béisbol lanzada hacia arriba, con respecto al tiempo.

El movimiento de un objeto proyectado al aire puede modelarse por una **función cuadrática.** Una función cuadrática es cualquier transformación de la función madre $f(x) = x^2$.

Investigación: La ciencia de los cohetes

Un cohete modelo despega y su motor se apaga cuando está a 25 metros por encima del suelo. Su velocidad en ese momento es de 50 metros por segundo. Si el cohete se desplaza hacia arriba verticalmente, y si la gravedad es la única fuerza que actúa en él, entonces el **movimiento de proyectil** del cohete puede describirse mediante la función

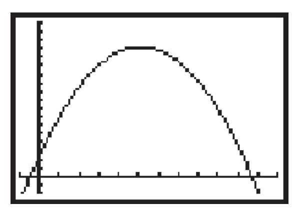
$$h(t) = \frac{1}{2}(-9.8)t^2 + 50t + 25$$

en la cual t es el número de segundos transcurridos desde que se apagó el motor, y $h(t)$ es la altura en metros al tiempo t.

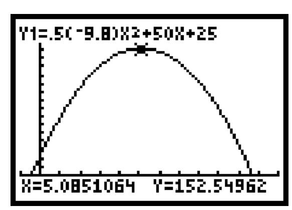
El hecho de que $h(0) = 25$ significa que la altura del cohete cuando se apagó el motor es de 25 metros.

En unidades métricas, la aceleración que resulta de la gravedad es 9.8 m/s^2. Este valor aparece en el término t^2 de la ecuación $\frac{1}{2}(-9.8)t^2$. El signo negativo muestra que la fuerza es descendente.

Grafica la función en tu calculadora. Asegúrate de usar una ventana que muestre todas las características importantes de la parábola. A la derecha se presenta la gráfica en la ventana $[-1, 12, 1, -20, 180, 10]$.



Puedes rastrear la gráfica (con el comando trace) para hallar las coordenadas del punto más alto (el vértice).



Las coordenadas son aproximadamente (5.10, 152.55) lo cual indica que altura máxima de 152.55 metros en 5.10 segundos después del despegue.

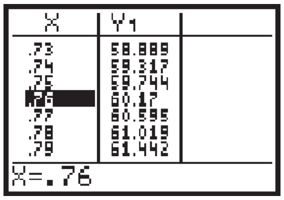
Para hallar la cantidad de tiempo que el cohete está en vuelo, encuentra las coordenadas del punto donde la gráfica interseca el lado positivo del eje x. Las coordenadas son aproximadamente (10.60, 0) lo cual indica que el cohete toca el suelo (es decir, la altura es 0) después de 10.60 segundos. Entonces, el vuelo del cohete dura aproximadamente 10.6 segundos.

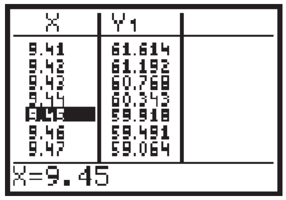
(continúa)

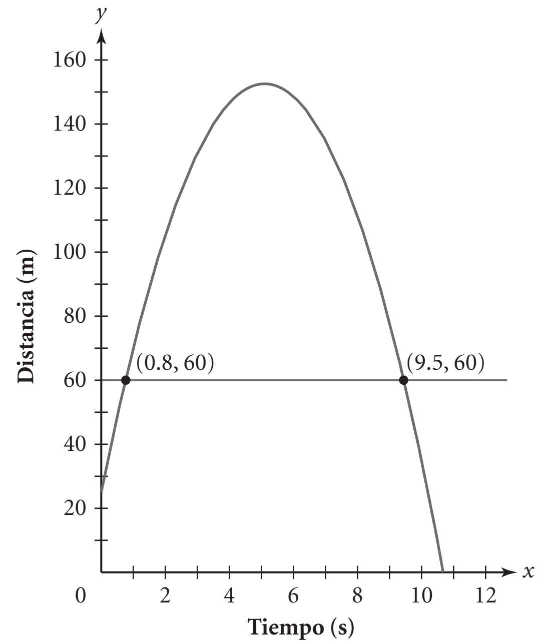
Para hallar el valor de t cuando $h(t) = 60$, necesitarías resolver

$\frac{1}{2}(-9.8)t^2 + 50t + 25 = 60$

En una gráfica, las soluciones son las coordenadas x de los puntos donde las gráficas de $h(t) = \frac{1}{2}(-9.8)t^2 + 50 + 25$ y de $h(t) = 60$ se intersecan.







En la investigación, aproximaste soluciones a una ecuación cuadrática usando tablas y gráficas. Para resolver una ecuación cuadrática usando los métodos simbólicos que ya conoces, debes poner la ecuación en una forma particular. En el Ejemplo B de tu libro se resuelve una ecuación cuadrática "deshaciendo" el orden de las operaciones. A continuación se presenta otro ejemplo. (*Observación:* Más adelante, aprenderás nuevos métodos que te permitirán resolver cualquier ecuación cuadrática.)

EJEMPLO Resuelve $-2(x-1)^2 + 9 = 4$ de manera simbólica.

▶ ***Solución*** Deshaz cada operación igual como lo harías cuando resuelves una ecuación lineal. Mantén la ecuación balanceada haciendo lo mismo en ambos lados. Para eliminar el cuadrado, saca la raíz cuadrada en ambos lados.

$-2(x-1)^2 + 9 = 4$	Ecuación original.
$-2(x-1)^2 = -5$	Resta 9 para deshacer la suma.
$(x-1)^2 = 2.5$	Divide entre -2 para deshacer la multiplicación.
$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{2.5}$	Saca la raíz cuadrada para deshacer la potenciación.
$\lvert x-1 \rvert = \sqrt{2.5}$	Definición de valor absoluto.
$x - 1 = \pm\sqrt{2.5}$	Usa $\pm$ para deshacer el valor absoluto.
$x = 1 \pm \sqrt{2.5}$	Suma 1 para deshacer la resta.

Las dos soluciones son $1 + \sqrt{2.5}$ y $1 - \sqrt{2.5}$, ó aproximadamente 2.58 y -0.58.

LECCIÓN CONDENSADA

9.2 Hallar las raíces y el vértice

En esta lección

- modelarás una situación real con una función cuadrática
- identificarás las **intersecciones *x*,** el **vértice,** y la **recta de simetría** de una parábola
- reescribirás una función cuadrática en **forma de vértice**

Has observado funciones cuadráticas que modelan el movimiento de un proyectil. En esta lección explorarás otra situación que puede modelarse con una función cuadrática.

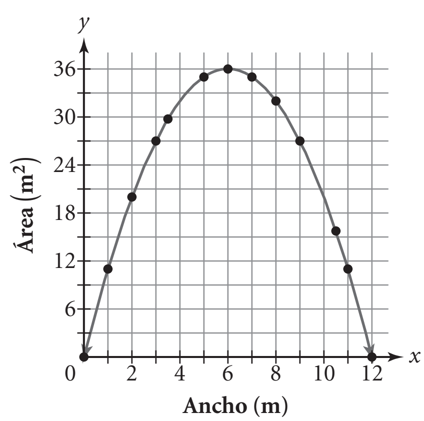
Investigación: Sacando el mayor provecho

Pasos 1–5 Supón que tienes 24 metros de cerca para delimitar un espacio rectangular que servirá como jardín. En la tabla se muestra el ancho, el largo, y el área de algunos cercados que puedes construir.

Ancho (m)	0	1	3.5	5	6	8	10.5	12
Largo (m)	12	11	8.5	7	6	4	1.5	0
Área (m^2)	0	11	29.75	35	36	32	15.75	0

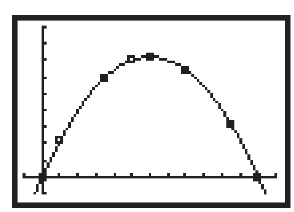
Observa que los valores del ancho de 0 y 12 dan áreas de 0. Introduce los valores del ancho en la lista L_1, y los valores del área en la lista L_2.

Haz una gráfica de los puntos (x, y), en los que x es el ancho del rectángulo y y es el área. Grafica puntos adicionales para ayudarte a determinar la forma de la gráfica. Los puntos parecen caer en forma de parábola. Cualquier valor de número real entre 0 y 12 sería posible para el ancho, de modo que puedes conectar los puntos con una curva lisa.



Parece que la gráfica alcanza su punto más alto en (6, 36), que indica que el rectángulo con un ancho de 6 metros tiene el área mayor, 36 metros cuadrados. La longitud de este rectángulo es también de 6 metros, así que el rectángulo es un cuadrado.

Pasos 6–9 Un jardín con un ancho de 2 metros tiene una longitud de 10 metros. Un jardín con un ancho de 4.3 metros tiene una longitud de 7.7 metros. En general, si x es el ancho del jardín, la longitud es $12 - x$ y la ecuación para el área y es $y = x(12 - x)$. En la misma ventana, grafica esta ecuación y los valores (L_1, L_2).



$[-1, 13, 1, -1, 45, 5]$

Al rastrear la gráfica de $y = x(12 - x)$ para hallar las coordenadas del vértice, puedes verificar que el cuadrado con lados de 6 metros tiene el área máxima.

(continúa)

Los puntos donde la gráfica cruza el eje x se conocen como las **intersecciones x.** Las intersecciones x de la gráfica anterior son (0, 0) y (12, 0). Esto indica que el rectángulo no tiene área si el ancho es de 0 metros o 12 metros. (*Observación:* Cuando se nombra una intersección x, en ocasiones sólo se da la coordenada x, en vez del par ordenado. Así, podrías decir que las intersecciones x de la gráfica anterior son 0 y 12.)

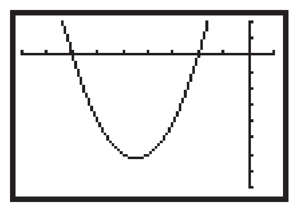
Si repites este proceso para diferentes perímetros (longitud total de la cerca), encontrarás que el rectángulo con mayor área es siempre un cuadrado.

Las coordenadas x de las intersecciones x de una gráfica son las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. Estas soluciones se conocen como las **raíces** de la función $y = f(x)$. Para la ecuación de la investigación, las raíces son 0 y 12, los valores del ancho que hacen que el área sea igual a cero.

Lee el resto de la lección en tu libro. En el Ejemplo A se muestra cómo usar tu calculadora para estimar las raíces de una función cuadrática. En el Ejemplo B se muestra cómo hallar el vértice y la **recta de simetría** de una parábola basándote en su ecuación, y después cómo usar esta información para reescribir la ecuación en **forma de vértice.** Aquí se presenta otro ejemplo.

EJEMPLO Encuentra la recta de simetría y el vértice de la parábola $y = x^2 + 9x + 14$. Después reescribe la ecuación en forma de vértice $y = a(x - h)^2 + k$.

► ***Solución*** Puedes usar una gráfica de calculadora para encontrar que las raíces son -7 y -2.



$[-9, 1, 1, -8, 2, 1]$

La recta de simetría es $x = -4.5$, la recta vertical que se ubica a la mitad de las intersecciones x. El vértice se encuentra sobre la recta de simetría, de modo que tiene una coordenada x de -4.5. Para hallar su coordenada y, sustituye x por -4.5 en la ecuación.

$$\begin{aligned} y &= (-4.5)^2 + 9(-4.5) + 14 \\ &= 20.25 - 40.5 + 14 \\ &= -6.25 \end{aligned}$$

Así pues, el vértice es $(-4.5, -6.25)$.

La gráfica es una transformación de la función madre, $f(x) = x^2$. Debido a que el vértice es $(-4.5, -6.25)$, existe una traslación de 4.5 unidades a la izquierda y -6.25 unidades hacia abajo; así, la ecuación es de la forma $y = a(x + 4.5)^2 - 6.25$. Si graficas $y = (x + 4.5)^2 - 6.25$ en la misma ventana que la ecuación original, encontrarás que las gráficas son iguales. Entonces, $y = (x + 4.5)^2 - 6.25$ es la forma de vértice de $y = x^2 + 9x + 14$.

LECCIÓN
CONDENSADA
9.3

De la forma de vértice a la forma general

En esta lección

- dibujarás diagramas para **expresiones cuadradas**
- dibujarás diagramas para escribir **trinomios** como los cuadrados de expresiones
- convertirás una ecuación cuadrática de su **forma de vértice** a su **forma general**

En la forma general de una ecuación cuadrática, $y = ax^2 + bx + c$, el lado derecho es la suma de tres términos. Un **término** es una expresión algebraica que representa solamente multiplicación y división entre variables y constantes. Una suma de términos con exponentes enteros positivos se conoce como **polinomio.** Lee sobre polinomios y términos semejantes en la página 508 de tu libro.

En el Ejemplo A practicas la identificación de polinomios. Lee y sigue este ejemplo.

Investigación: Cuadrados sorpresivos

Pasos 1–4 En el diagrama del Paso 1 de tu libro se expresa 7^2 como $(3 + 4)^2$. La suma de las áreas de los rectángulos internos es $9 + 2(12) + 16 = 49$. Esto verifica que $7^2 = (3 + 4)^2$.

Ahora, dibuja y rotula un diagrama parecido para cada expresión del Paso 2. Aquí se presentan los resultados para las partes a y b.

a. $(5 + 3)^2 = 25 + 2(15) + 9 = 64$

	5	3
5	25	15
3	15	9

b. $(4 + 2)^2 = 16 + 2(8) + 4 = 36$

	4	2
4	16	8
2	8	4

Puedes usar diagramas parecidos para mostrar los cuadrados de diferencias, incluso cuando las longitudes son negativas. En el diagrama anterior al Paso 3 en tu libro, se muestra 7^2 como $(10 - 3)^2$. Dibuja y rotula un diagrama para cada expresión del Paso 3. Aquí están los resultados de las partes a y b.

a. $(5 - 2)^2 = 25 + 2(-10) + 4 = 9$

	5	-2
5	25	-10
-2	-10	4

b. $(7 - 3)^2 = 49 + 2(-21) + 9 = 16$

	7	-3
7	49	-21
-3	-21	9

(continúa)

Las expresiones del Paso 4 implican variables. Dibuja y rotula un diagrama para cada expresión. Combina los términos semejantes para expresar cada respuesta como trinomio. Los resultados de las partes a y b se muestran a continuación.

a. $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$

	x	5
x	x^2	$5x$
5	$5x$	25

b. $(x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

	x	-3
x	x^2	$-3x$
-3	$-3x$	9

Pasos 5–6 Para ciertos tipos de trinomios, puedes trazar un diagrama rectangular y después reescribir una expresión equivalente en la forma $(x + h)^2$. Inténtalo con las expresiones del Paso 5. Aquí están los resultados para las partes a y b. En cada caso, el diagrama se divide en un cuadrado con un área igual al primer término, un cuadrado con un área igual al último término, y dos rectángulos, cada uno con un área igual a la mitad del término en el medio.

a. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

	x	3
x	x^2	$3x$
3	$3x$	9

b. $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2$

	x	-5
x	x^2	$-5x$
-5	$-5x$	25

Puedes usar los resultados del Paso 5 para resolver las ecuaciones del Paso 6. Aquí se muestran los resultados de las partes a y b.

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 49 \\ (x + 3)^2 &= 49 \\ \sqrt{(x + 3)^2} &= \sqrt{49} \\ x + 3 &= \pm 7 \\ x &= -3 \pm 7 \\ x &= 4 \text{ ó } x = -10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 10x + 25 &= 81 \\ (x - 5)^2 &= 81 \\ \sqrt{(x - 5)^2} &= \sqrt{81} \\ x - 5 &= \pm 9 \\ x &= 5 \pm 9 \\ x &= 14 \text{ ó } x = -4 \end{aligned}$$

Pasos 7–9 Los números como 25 se conocen como **cuadrados perfectos** porque son los cuadrados de números enteros, en este caso 5 y -5. El trinomio $x^2 - 10x + 25$ se conoce también como cuadrado perfecto, porque es el cuadrado de $x - 5$. Si el coeficiente del término x^2 es 1, entonces un trinomio es un cuadrado perfecto si el último término es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término x. Usa esta idea para identificar los cuadrados perfectos del Paso 7. Los resultados se presentan en la página siguiente.

(continúa)

a. Debido a que 49 es igual al cuadrado de la mitad de 14, éste es un trinomio cuadrado perfecto: $x^2 + 14x + 49 = (x + 7)^2$.

b. Debido a que 81 es igual al cuadrado de la mitad de -18, éste es un trinomio cuadrado perfecto: $x^2 - 18x + 81 = (x - 9)^2$.

c. Éste no es un trinomio cuadrado perfecto porque 25 no es igual al cuadrado de la mitad de 20.

d. Éste no es un trinomio cuadrado perfecto porque -36 no es igual al cuadrado de la mitad de -12.

Puedes usar tus habilidades para elevar binomios al cuadrado, para convertir ecuaciones de la forma de vértice a la forma general. Lee el Ejemplo B y el texto que le sigue.

LECCIÓN CONDENSADA

9.4 Forma factorizada

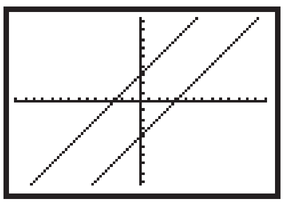
En esta lección

- trabajarás con ecuaciones cuadráticas en **forma factorizada**
- conocerás la conexión entre la forma factorizada de una ecuación cuadrática y las raíces de la ecuación
- escribirás la ecuación de una parábola en tres formas diferentes

Has trabajado con ecuaciones cuadráticas dadas en forma de vértice y en forma general. En esta lección aprenderás sobre la **forma factorizada** de una ecuación cuadrática.

Investigación: Llegar a la raíz del asunto

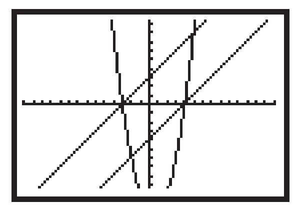
Pasos 1–4 En la misma ventana, grafica $y = x + 3$ y $y = x - 4$.



$[-14.1, 14.1, 1, -9.3, 9.3, 1]$

La intersección x de $y = x + 3$ es -3. La intersección x de $y = x - 4$ es 4.

Ahora, en la misma ventana, grafica $y = (x + 3)(x - 4)$. La gráfica es una parábola.



Las intersecciones x de la parábola son -3 y 4, que constituyen las intersecciones x de $y = x + 3$ y $y = x - 4$, respectivamente. Esto tiene sentido, porque el producto $(x + 3)(x - 4)$ es cero cuando $x + 3$ es cero o cuando $x - 4$ es cero.

Puedes utilizar un diagrama rectangular para desarrollar la expresión $(x + 3)(x - 4)$, y después reescribir $y = (x + 3)(x - 4)$ como $y = x^2 - x - 12$. Verifica que las dos ecuaciones son equivalentes graficándolas ambas en los mismos ejes. Debido a que las ecuaciones son idénticas, sabes que las *raíces* de $y = x^2 - x - 12$ son -3 y 4.

	x	-4
x	x^2	$-4x$
3	$3x$	-12

Pasos 5–8 Dada una ecuación cuadrática en forma general, en ocasiones puedes usar un diagrama rectangular para reescribirla en forma factorizada y después encontrar sus raíces.

Considera la ecuación $y = x^2 + 5x + 6$. El diagrama muestra que puedes reescribir el lado derecho como $(x + 3)(x + 2)$. Así, en forma factorizada, la ecuación es $y = (x + 3)(x + 2)$. Usa una gráfica o tabla de calculadora para verificar que $y = x^2 + 5x + 6$ y $y = (x + 3)(x - 2)$ son equivalentes.

	x	2
x	x^2	$2x$
3	$3x$	6

De la forma factorizada, puedes ver que las raíces de $y = x^2 + 5x + 6$ son -3 y -2.

Ahora, usa diagramas rectangulares para reescribir cada ecuación del Paso 8 en forma factorizada y encontrar sus raíces. Aquí se ven los resultados.

(continúa)

a. $y = (x - 5)(x - 2)$; raíces: 5 y 2

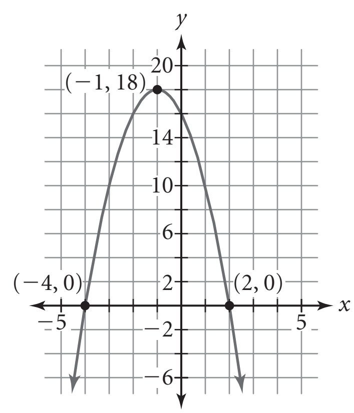
b. $y = (x + 8)(x - 2)$; raíces: -8 y 2

c. $y = (x - 6)(x + 8)$; raíces: 6 y -8

d. $y = (x - 7)(x - 4)$; raíces: 7 y 4

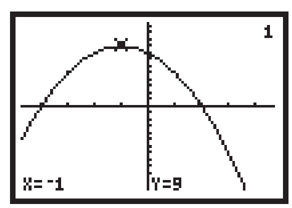
Ahora lee el texto que sigue a la investigación en la página 516 de tu libro, donde se resumen las tres formas de una ecuación cuadrática. Después lee el Ejemplo A, el cual muestra cómo escribir una ecuación de una parábola en las tres formas, y lee el texto que sigue al ejemplo. Aquí tienes un ejemplo adicional.

EJEMPLO Escribe la ecuación de esta parábola en forma de vértice, forma general, y forma factorizada.



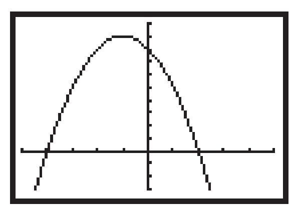
▶ Solución De la gráfica, puedes ver que las intersecciones x son -4 y 2. Entonces, la forma factorizada contiene los factores binomiales $(x + 4)$ y $(x - 2)$. También puedes ver que, debido a que la parábola está "boca abajo", el coeficiente de x^2 debe ser negativo.

Si graficas $y = -(x + 4)(x - 2)$ en tu calculadora, verás que tiene las mismas intersecciones x que la gráfica anterior pero tiene un vértice diferente.



[−4.7, 4.7, 1, −12.4, 12.4, 1]

El vértice de $y = -(x + 4)(x - 2)$ es $(-1, 9)$, mientras que el vértice de la parábola original es $(-1, 18)$. De modo que la parábola original es un estiramiento vertical de la gráfica de $y = -(x + 4)(x - 2)$ por un factor de $\frac{18}{9}$, ó 2. Esto significa que la forma factorizada es $y = -2(x + 4)(x - 2)$. Grafica esta ecuación en tu calculadora para verificar que su gráfica se parece a la gráfica original.



[−5, 5, 1, −6, 20, 2]

Sabes que el valor de a es -2 y que el vértice es $(-1, 18)$, de modo que puedes escribir la forma de vértice de la ecuación, $y = -2(x + 1)^2 + 18$. Para obtener la forma general, desarrolla la forma factorizada o la forma de vértice.

$y = -2(x + 1)^2 + 18$	Forma de vértice.
$y = -2\left(x^2 + 2x + 1\right) + 18$	Usa un diagrama rectangular para desarrollar $(x + 1)^2$.
$y = -2x^2 - 4x - 2 + 18$	Usa la propiedad distributiva.
$y = -2x^2 - 4x + 16$	Combina términos semejantes.

Ahora lee el Ejemplo B, el cual te muestra cómo simplificar las expresiones racionales factoreando cualquier polinomio en el numerador o el denominador.

LECCIÓN CONDENSADA

9.6 Completar el cuadrado

En esta lección

- resolverás ecuaciones cuadráticas al **completar el cuadrado**
- reescribirás ecuaciones cuadráticas en forma de vértice completando el cuadrado
- trabajarás con una ecuación cuadrática que no tiene **soluciones en números reales**

Puedes encontrar soluciones aproximadas de las ecuaciones cuadráticas usando gráficas y tablas de calculadora. Si eres capaz de escribir la ecuación en forma factorizada o en forma de vértice, puedes utilizar métodos simbólicos para hallar las soluciones exactas. En esta lección aprenderás un método simbólico llamado **completar el cuadrado,** que puedes usar para hallar soluciones exactas de cualquier ecuación cuadrática en forma general, $y = ax^2 + bx + c$.

Investigación: En busca de soluciones

Pasos 1–4 Completa cada diagrama rectangular del Paso 1 de modo que sea un cuadrado. Aquí se muestran los resultados de las partes a, b, y d.

a.

	x	2
x	x^2	$2x$
2	$2x$	4

b.

	x	-3
x	x^2	$-3x$
-3	$-3x$	9

d.

	x	$\frac{b}{2}$
x	x^2	$\frac{b}{2}x$
$\frac{b}{2}$	$\frac{b}{2}x$	$\frac{b^2}{4}$

Usando los diagramas, puedes escribir ecuaciones de la forma $x^2 + bx + c = (x + h)^2$. Aquí se ven las ecuaciones de las partes a, b, y d. Escribe una ecuación parecida para la parte c.

a. $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ **b.** $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$ **d.** $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$

Observa que las operaciones del lado derecho de cada ecuación pueden "deshacerse" para obtener x. Por ejemplo, puedes deshacer $(x + 2)^2$ si obtienes la raíz cuadrada, $x + 2$, y después restas 2. No puedes deshacer las operaciones del lado izquierdo de la ecuación para obtener x, entonces la forma $(x + h)^2$ se utiliza para resolver problemas.

Si supones que el área de cada cuadrado del Paso 1 es 100, puedes escribir ecuaciones que pueden resolverse deshaciendo el orden de las operaciones. Aquí tienes las ecuaciones de las partes a y b. Escribe una ecuación parecida para la parte c.

a. $(x + 2)^2 = 100$ **b.** $(x - 3)^2 = 100$

En la página siguiente se presentan las soluciones simbólicas de las ecuaciones anteriores. Escribe una solución parecida de la ecuación de la parte c.

(continúa)

a.
$$\begin{aligned} (x+2)^2 &= 100 \\ \sqrt{(x+2)^2} &= \sqrt{100} \\ x+2 &= \pm 10 \\ x &= -2 \pm 10 \\ x &= -12 \text{ ó } x = 8 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 100 \\ \sqrt{(x-3)^2} &= \sqrt{100} \\ x-3 &= \pm 10 \\ x &= 3 \pm 10 \\ x &= 13 \text{ ó } x = -7 \end{aligned}$$

Pasos 5–7 También puedes resolver una ecuación completando el cuadrado. En el ejemplo siguiente se ilustra este método.

$x^2 + 6x - 1 = 0$	Ecuación original.
$x^2 + 6x = 1$	Suma 1 a ambos lados.
$x^2 + 6x + 9 = 1 + 9$	Suma 9 a ambos lados, convirtiendo el lado izquierdo en un trinomio cuadrado perfecto.
$(x + 3)^2 = 10$	Reescribe el trinomio como un binomio al cuadrado.
$x + 3 = \pm\sqrt{10}$	Saca la raíz cuadrada de ambos lados.
$x = -3 \pm \sqrt{10}$	Suma -3 a ambos lados.

Las soluciones son $-3 + \sqrt{10}$, ó aproximadamente 0.162, y $-3 - \sqrt{10}$, ó aproximadamente -6.162. Puedes verificar estas soluciones al graficar $y = x^2 + 6x - 1$ y encontrar las intersecciones x o al construir una tabla y hallar los valores x que correspondan al valor 0 de y.

Aquí están los pasos para resolver $x^2 + 8x - 5 = 0$.

$x^2 + 8x - 5 = 0$	Ecuación original.
$x^2 + 8x = 5$	Suma 5 a ambos lados.
$x^2 + 8x + 16 = 5 + 16$	Suma 16 a ambos lados, convirtiendo el lado izquierdo en un trinomio cuadrado perfecto.
$(x + 4)^2 = 21$	Reescribe el trinomio como un binomio al cuadrado.
$x + 4 = \pm\sqrt{21}$	Saca la raíz cuadrada de ambos lados.
$x = -4 \pm \sqrt{21}$	Suma -4 a ambos lados.

Las soluciones son $-4 + \sqrt{21}$ que es aproximadamente 0.583, y $-4 - \sqrt{21}$, ques es aproximadamente -8.583.

La clave para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado es expresar uno de los lados como trinomio cuadrado perfecto. En la investigación las ecuaciones estaban en la forma $y = 1x^2 + bx + c$. En el Ejemplo A de tu libro se muestra cómo resolver una ecuación cuadrática cuando el coeficiente de x^2 no es 1. Lee ese ejemplo atentamente. Después lee el Ejemplo B, que muestra cómo completar el cuadrado para convertir una ecuación a su forma de vértice.

En la solución de $2(x + 3)^2 + 3 = 0$ del Ejemplo B, el paso final es $x = -3 \pm \sqrt{-\frac{3}{2}}$. Debido a que un número negativo no tiene raíz cuadrada en los números reales, la ecuación no tiene solución en los números reales. La gráfica de la ecuación $y = 2(x + 3)^2 + 3$ en la página 528 puede ayudarte a entender porqué no hay soluciones. La gráfica no cruza el eje x, de modo que no hay valor real de x para el cual $2(x + 3)^2 + 3 = 0$ sea cierto.

LECCIÓN CONDENSADA

9.7 La fórmula cuadrática

En esta lección

- verás cómo se obtiene la **fórmula cuadrática**
- usarás la fórmula cuadrática para resolver ecuaciones

Si una ecuación cuadrática está dada en forma de vértice, o si no tiene término en x, puedes resolverla deshaciendo las operaciones o manteniendo el equilibrio de la ecuación. Si la ecuación se presenta en forma factorizada, puedes resolverla encontrando los valores x que hacen que los factores sean iguales a cero. Si la ecuación es un trinomio cuadrado perfecto, puedes factorizarla y después encontrar las soluciones. Observa las seis ecuaciones dadas al inicio de la lección y piensa cómo resolverías cada una de ellas.

En la lección anterior, aprendiste cómo resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado. Desafortunadamente, en ocasiones este método resulta muy complicado. Por ejemplo, intenta resolver $-4.9x^2 + 5x - \frac{16}{3} = 0$ completando el cuadrado.

Considera la ecuación cuadrática general $ax^2 + bx + c = 0$. En esta lección verás cómo completar el cuadrado en este caso general te lleva a una fórmula que se puede utilizar para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Investigación: Derivar la fórmula cuadrática

Considera la ecuación $2x^2 + 3x - 1 = 0$. Esta ecuación se expresa en la forma general, $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a = 2$, $b = 3$, y $c = -1$.

En esta investigación, mostraremos los pasos para resolver la ecuación general, $ax^2 + bx + c = 0$, en la parte izquierda, y los pasos para resolver la ecuación particular, $2x^2 + 3x - 1 = 0$, en la parte derecha.

Primero, agrupa todos los términos variables en la parte izquierda de la ecuación.

$ax^2 + bx = -c$	$2x^2 + 3x = 1$

Para completar el cuadrado, el coeficiente de x^2 debe ser 1. Por eso, divide ambos lados de la ecuación entre el valor de a.

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$	$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}$

Completa el cuadrado en el lado izquierdo de la ecuación, sumando el cuadrado de la mitad del coeficiente de x. Suma este mismo valor al lado derecho.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$	$x^2 + \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}$

Reescribe el trinomio del lado izquierdo de la ecuación como un binomio al cuadrado. En el lado derecho, reescribe las fracciones con un denominador común.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$	$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} + \frac{8}{16}$

(continúa)

Saca la raíz cuadrada de ambos lados.

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}}$	$x + \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{9 + 8}}{\sqrt{16}}$

Aísla x en el lado izquierdo.

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$

Expresa las soluciones como fracciones.

$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{4}$
ó $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	ó $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{4}$

En forma decimal, las soluciones de $2x^2 + 3x - 1 = 0$ son aproximadamente 0.281 y -1.781.

Observa las soluciones de la forma general. Observa que, para que las soluciones sean números reales, el valor de a no puede ser cero (porque la división entre cero no está definida) y que el valor de $b^2 - 4ac$ debe ser mayor que o igual a cero (porque los números negativos no tienen raíces cuadradas reales).

La fórmula cuadrática, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, da las soluciones de una ecuación cuadrática escrita en su forma general, $ax^2 + bx + c = 0$. Para usar la fórmula, solamente necesitas conocer los valores de a, b, y c. En el ejemplo en tu libro se ilustra cómo usar la fórmula. Aquí se presenta otro ejemplo.

EJEMPLO Usa la fórmula cuadrática para resolver $2x^2 - 9 = x$.

▶ ***Solución*** Primero, escribe la ecuación en forma general, restando x de ambos lados. El resultado es $2x^2 - x - 9 = 0$. Para esta ecuación, $a = 2$, $b = -1$, y $c = -9$. Ahora, sustituye estos valores en la fórmula cuadrática.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-9)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (-72)}}{4}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{73}}{4}$$

Así pues, las soluciones son $\frac{1 + \sqrt{73}}{4}$ ó aproximadamente 2.386, y $\frac{1 - \sqrt{73}}{4}$, ó aproximadamente -1.886.

LECCIÓN CONDENSADA

9.8 Funciones cúbicas

En esta lección

- determinarás si los números dados son **cubos perfectos**
- descubrirás la relación entre la forma factorizada de una **ecuación cúbica** y su gráfica
- escribirás ecuaciones para **funciones cúbicas** basándote en sus gráficas

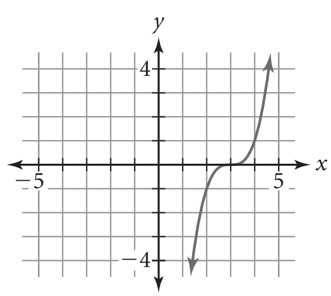
Lee el texto al principio de la página 537 de tu libro, donde se explica que la **función cúbica,** $f(x) = x^3$, modela el volumen de un cubo con arista de longitud x. Las funciones de la familia cuya función madre es $f(x) = x^3$ se conocen como funciones cúbicas.

El volumen de un cubo con arista de longitud 5 es 5^3, ó 125. El número 125 es un **cubo perfecto** porque es igual a un entero elevado al cubo (es decir, elevado a la tercera potencia). El número 5 se conoce como la **raíz cúbica** de 125. Puedes expresar esto escribiendo $5 = \sqrt[3]{125}$.

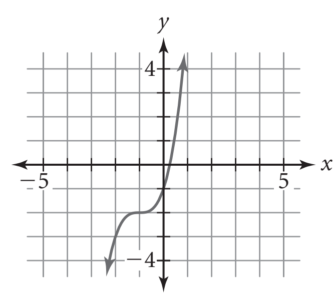
La gráfica de la función madre $y = x^3$ se muestra en la página 537 de tu libro. Puedes usar lo que sabes sobre transformaciones para escribir las ecuaciones de otras funciones cúbicas.

EJEMPLO Escribe una ecuación para cada gráfica.

a.



b.



▸ ***Solución***

a. La gráfica es una traslación de la gráfica de $y = x^3$ 3 unidades a la derecha. Así que la ecuación es $y = (x - 3)^3$.

b. La gráfica es una traslación de la gráfica de $y = x^3$ 1 unidad a la izquierda y 2 unidades hacia abajo. Así que la ecuación es $y = (x + 1)^3 - 2$.

(continúa)

Investigación: Búsqueda de factores

En esta investigación descubrirás la relación entre la forma factorizada de una ecuación cúbica y su gráfica.

Pasos 1–3 Enumera las intersecciones x de cada gráfica del Paso 1. Aquí se muestran los resultados.

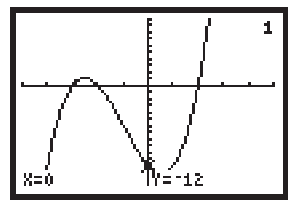
Gráfica A: -2, 1, 2	Gráfica B: -2, 1, 2	Gráfica C: -1, 0, 2
Gráfica D: -1, 0, 2	Gráfica E: -2, 1, 3	Gráfica F: -3, -1, 2

Usa las tablas y las gráficas para ayudarte a relacionar las ecuaciones del Paso 2 con las correspondientes gráficas del Paso 1. Aquí están los resultados.

a. Gráfica F	**b.** Gráfica C	**c.** Gráfica A
d. Gráfica D	**e.** Gráfica B	**f.** Gráfica E

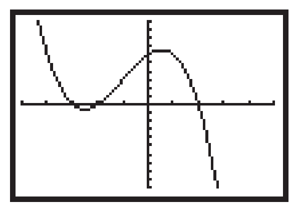
Las intersecciones x son las raíces de la ecuación. Por eso, si la gráfica de una ecuación cúbica tiene como intersección x el valor de a, la forma factorizada de la ecuación incluye el factor $(x - a)$. Por ejemplo, la Gráfica A tiene las intersecciones x -2, 1, y 2, y su ecuación incluye los factores $(x + 2)$, $(x - 1)$, y $(x - 2)$.

Paso 4 Ahora encontrarás una ecuación para la gráfica en el Paso 4. Tiene intersecciones x en -3, -2, y 2. La ecuación $y = (x + 3)(x + 2)(x - 2)$ tiene las mismas intersecciones x. Aquí se presenta su gráfica.



$[-5, 5, 1, -15, 10, 1]$

Ahora, ajusta la ecuación hasta que la gráfica se parece a la del Paso 4. El punto $(0, -12)$ corresponde al punto $(0, 6)$ en la gráfica original. Entonces, necesitas reflejar la gráfica a través del eje x y aplicar un estiramiento vertical por un factor de 0.5. La ecuación entonces se convierte en $y = -0.5(x + 3)(x + 2)(x - 2)$. Si graficas esta ecuación en tu calculadora, verás que el resultado corresponde a la gráfica del Paso 4.



$[-5, 5, 1, -10, 10, 1]$

Lee el Ejemplo B en tu libro, donde se muestra cómo hallar una ecuación para otra gráfica cúbica.

Dada una ecuación cúbica en forma general, puedes graficarla y después usar las intersecciones x para ayudarte a escribir la ecuación en forma factorizada. El texto que sigue el Ejemplo B muestra cómo reescribir $y = x^3 - 3x + 2$ en forma factorizada. La gráfica de esta ecuación toca el eje x en $x = 1$, pero realmente no pasa por el eje en este punto. Esto indica que hay una *raíz doble,* lo que significa que el factor $x - 1$ aparece dos veces en la ecuación. La forma factorizada de la ecuación es $y = (x + 2)(x - 1)^2$.

Lee el Ejemplo C en tu libro, el cual muestra una manera de factorear una expresión cúbica si solamente conoces una intersección x.