Matemática

Programa de Estudio | Actualización 2009

Cuarto año medio

Ministerio de Educación

4

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Matemática

Programa de Estudio | Actualización 2009
Cuarto año medio

Ministerio de Educación

4

MATEMÁTICA
Programa de Estudio
Cuarto medio
Primera edición: octubre de 2015

Decreto Exento de Educación n° 1147/2015

Unidad de Currículum y Evaluación
Ministerio de Educación de Chile
Avenida Bernardo O'Higgins 1371
Santiago de Chile

ISBN 978-956-292-526-6

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Estimada Comunidad Educativa:

El Ministerio de Educación, en su propósito por favorecer los procesos de gestión curricular, ha elaborado una propuesta para programas educativos que se imparten en 3° y 4° año de enseñanza media. Esta propuesta está enfocada en los sectores de Inglés, Lenguaje y Comunicación, Biología, Física, Química, Matemática e Historia, Geografía y Ciencias Sociales.

Estos instrumentos curriculares buscan ser una propuesta pedagógica y didáctica que apoye el proceso de gestión curricular de los establecimientos educacionales y sus docentes en la articulación y generación de experiencias de aprendizajes pertinentes, relevantes y útiles para sus estudiantes.

Adicionalmente, estas nuevas herramientas brindan espacio para que los y las docentes los vinculen con las necesidades y potencialidades propias de su contexto, y trabajen a partir de los intereses y características de sus estudiantes y de los énfasis formativos declarados en su Proyecto Educativo Institucional.

Los programas son una invitación a las comunidades educativas de nuestros liceos a enfrentar un desafío de preparación y estudio, de compromiso con la vocación formadora y de altas expectativas de los aprendizajes que pueden lograr todos nuestros y nuestras estudiantes.

Entendiendo que la Formación General tiene como principio ofrecer espacios de aprendizaje integral a las y los estudiantes, es de suma importancia promover el diálogo entre estos instrumentos y la Formación Diferenciada. De esta manera, complejizando, diversificando y profundizando estas áreas de aprendizaje estaremos contribuyendo en el desarrollo de herramientas que nuestros y nuestras jóvenes requieren para desenvolverse de manera participativa, reflexiva, crítica y responsable, tanto en su vida personal como en su vida en sociedad.

Los presentes Programas de Estudio han sido elaborados por la Unidad de Currículum y Evaluación del Ministerio de Educación, de acuerdo a las definiciones establecidas en la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009 (Decreto Supremo de Educación N° 254/2009) y han sido aprobados por el Consejo Nacional de Educación para entrar en vigencia a partir de 2016.

Los invito a analizar activamente y trabajar de forma colaborativa y contextualizada con estos programas en la formación integral de nuestros y nuestras estudiantes.

ADRIANA DELPIANO PUELMA
MINISTRA DE EDUCACIÓN

Índice

Presentación

El Programa es una propuesta para lograr los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios.

El Programa de Estudio ofrece una propuesta para organizar y orientar el trabajo pedagógico del año escolar. Esta propuesta pretende promover el logro de los Objetivos Fundamentales (OF) y el desarrollo de los Contenidos Mínimos Obligatorios (CMO) que define el Marco Curricular[1].

La ley dispone que cada establecimiento puede elaborar e implementar sus propios Programas de Estudio, una vez que estos hayan sido aprobados por parte del Mineduc. El presente Programa constituye una propuesta para aquellos establecimientos que no cuentan con uno propio.

Los principales componentes que conforman esta propuesta son:

› Una especificación de los aprendizajes que se deben lograr para alcanzar los OF y los CMO del Marco Curricular, lo que se expresa mediante los Aprendizajes Esperados[2].

› Una organización temporal de estos aprendizajes en semestres y unidades.

› Una propuesta de actividades de aprendizaje y de evaluación, a modo de sugerencia.

Además, se presenta un conjunto de elementos para orientar el trabajo pedagógico que se lleva a cabo a partir del Programa y para promover el logro de los objetivos que este propone.

Este Programa de Estudio incluye:

NOCIONES BÁSICAS

Esta sección presenta conceptos fundamentales que están en la base del Marco Curricular y, a la vez, ofrece una visión general acerca de la función de los Mapas de Progreso.

1 Decreto Supremo N° 254 de 2009.

2 En algunos casos, estos aprendizajes están formulados en los mismos términos que algunos de los OF del Marco Curricular. Esto ocurre cuando esos OF se pueden desarrollar íntegramente en una misma unidad de tiempo, sin que sea necesario su desglose en definiciones más específicas.

CONSIDERACIONES GENERALES PARA IMPLEMENTAR EL PROGRAMA

Consisten en orientaciones relevantes para trabajar con el Programa y organizar el trabajo en torno a él.

PROPÓSITOS, HABILIDADES Y ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Esta sección presenta sintéticamente los propósitos y sentidos sobre los que se articulan los aprendizajes del sector y las habilidades a desarrollar. También entrega algunas orientaciones pedagógicas importantes para implementar el Programa en el sector.

VISIÓN GLOBAL DEL AÑO

Presenta todos los Aprendizajes Esperados que se deben desarrollar durante el año, organizados de acuerdo a unidades.

UNIDADES

Junto con explicitar los Aprendizajes Esperados propios de la unidad, incluyen indicadores de evaluación y ejemplos de actividades que apoyan y orientan el trabajo destinado a promover estos aprendizajes[3].

INSTRUMENTOS Y EJEMPLOS DE EVALUACIÓN

Ilustran formas de apreciar el logro de los Aprendizajes Esperados y presentan diversas estrategias que pueden usarse para este fin.

MATERIAL DE APOYO SUGERIDO

Se trata de recursos bibliográficos y electrónicos que pueden emplearse para promover los aprendizajes del sector; se distingue entre los que sirven a los y las docentes y los destinados a las y los estudiantes.

3 En algunos casos, las actividades contienen relaciones interdisciplinarias debido a que vinculan dos o más sectores y se simbolizan con ®.

Nociones básicas

APRENDIZAJES COMO INTEGRACIÓN DE CONOCIMIENTOS, HABILIDADES Y ACTITUDES

Habilidades, conocimientos y actitudes…

Los aprendizajes que promueven el Marco Curricular y los Programas de Estudio apuntan a un desarrollo integral de los y las estudiantes. Para tales efectos, esos aprendizajes involucran tanto los conocimientos propios de la disciplina como las habilidades y las actitudes.

… movilizados para enfrentar diversas situaciones y desafíos…

Se busca que las y los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje como al desenvolverse en su entorno. Esto supone orientarlos hacia el logro de competencias, entendidas como la movilización de dichos elementos para realizar de manera efectiva una acción determinada.

… y que se desarrollan de manera integrada.

Se trata de una noción de aprendizaje de acuerdo con la cual los conocimientos, las habilidades y las actitudes se desarrollan de manera integrada y, a la vez, se enriquecen y potencian de forma recíproca.

Deben promoverse de manera sistemática.

Los conocimientos, las habilidades y las actitudes no se adquieren espontáneamente al estudiar las disciplinas. Requieren promoverse de manera metódica y estar explícitos en los propósitos que articulan el trabajo de los y las docentes.

CONOCIMIENTOS

Son importantes, porque…

Enriquecen la comprensión y la relación con el entorno.

… los conceptos de las disciplinas o sectores de aprendizaje enriquecen la comprensión de los y las estudiantes sobre los fenómenos que les toca enfrentar. Les permiten relacionarse con el entorno, utilizando nociones complejas y profundas que complementan, de manera crucial, el saber que han generado por medio del sentido común y la experiencia cotidiana. Además, estos conceptos son fundamentales para que construyan nuevos aprendizajes.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque…

Son una base para el desarrollo de habilidades.

… son una condición para el progreso de las habilidades. Ellas no se desarrollan en un vacío, sino sobre la base de ciertos conceptos o conocimientos.

HABILIDADES

Son importantes, porque…

… el aprendizaje involucra no solo el saber, sino también el saber hacer. Por otra parte, la continua expansión y la creciente complejidad del conocimiento demandan cada vez más capacidades de pensamiento que permitan, entre otros aspectos, usar la información de manera apropiada y rigurosa, examinar críticamente las diversas fuentes de información disponibles, adquirir y generar nuevos conocimientos y aplicarlos de manera pertinente.

Son fundamentales en el actual contexto social.

Esta situación hace relevante la promoción de diferentes habilidades; entre ellas, desarrollar una investigación, comparar y evaluar la confiabilidad de las fuentes de información y realizar interpretaciones a la luz de la evidencia.

Se deben desarrollar de manera integrada, porque…

… sin esas habilidades, los conocimientos y los conceptos que puedan elaborar las y los estudiantes resultan elementos inertes; es decir, elementos que no pueden poner en juego para comprender y enfrentar las diversas situaciones a las que se ven expuestos y expuestas.

Permiten poner en juego los conocimientos.

ACTITUDES

Son importantes, porque…

… los aprendizajes siempre están asociados con las actitudes y disposiciones de los y las estudiantes. Entre los propósitos establecidos para la educación se contempla el desarrollo en los ámbitos personal, social, ético y ciudadano. Ellos incluyen aspectos de carácter afectivo y, a la vez, ciertas disposiciones. A modo de ejemplo, los aprendizajes involucran actitudes como el respeto y la valoración hacia personas e ideas distintas, la solidaridad, el interés por el conocimiento, la valoración del trabajo, la responsabilidad, el emprendimiento, la perseverancia, el rigor, el cuidado y la valoración del ambiente.

Están involucradas en los propósitos formativos de la educación.

Se deben enseñar de manera integrada, porque…

… requieren de los conocimientos y las habilidades para su desarrollo. Esos conocimientos y habilidades entregan herramientas para elaborar juicios

Son enriquecidas por los conocimientos y las habilidades.

informados, analizar críticamente diversas circunstancias y contrastar criterios y decisiones, entre otros aspectos involucrados en este proceso.

Orientan la forma de usar los conocimientos y las habilidades.

A la vez, las actitudes orientan el sentido y el uso que cada estudiante otorgue a los conocimientos y las habilidades desarrollados. Son, por lo tanto, un antecedente necesario para usar constructivamente estos elementos.

OBJETIVOS FUNDAMENTALES TRANSVERSALES (OFT)

Son propósitos generales definidos en el currículum…

Son aprendizajes que tienen un carácter comprensivo y general, y apuntan al desarrollo personal, ético, social e intelectual de las y los estudiantes. Forman parte constitutiva del currículum nacional y, por lo tanto, los establecimientos deben asumir la tarea de promover su logro.

… que deben promoverse en toda la experiencia escolar.

Los OFT no se logran por medio de un sector de aprendizaje en particular: conseguirlos depende del conjunto del currículum. Deben promoverse mediante las diversas disciplinas y en las distintas dimensiones del quehacer educativo dentro y fuera del aula (por ejemplo, por medio del proyecto educativo institucional, de los planes de mejoramiento educativo, de la práctica docente, del clima organizacional, de las normas de convivencia escolar o de las ceremonias y actividades escolares).

Integran conocimientos, habilidades y actitudes.

No se trata de objetivos que incluyan únicamente actitudes y valores. Supone integrar esos aspectos con el desarrollo de conocimientos y habilidades.

Dentro de los aspectos más relevantes se encuentran los relacionados con una educación inclusiva. Por un lado, los OFT promueven la formación ciudadana de cada estudiante. Por otro, incluyen una perspectiva de género orientada a eliminar las desigualdades entre hombres y mujeres, ampliando la mirada hacia la diversidad en el aula, formando niños, niñas y adolescentes responsables de su propio bienestar y del bien común.

Se organizan en una matriz común para educación básica y media.

A partir de la actualización al Marco Curricular realizada el año 2009, estos objetivos se organizaron bajo un esquema común para la educación básica y la educación media. De acuerdo con este esquema, los Objetivos Fundamentales Transversales se agrupan en cinco ámbitos: crecimiento y autoafirmación personal; desarrollo del pensamiento; formación ética; la persona y su entorno; y tecnologías de la información y la comunicación.

MAPAS DE PROGRESO

Son descripciones generales que señalan cómo progresan habitualmente los aprendizajes en las áreas clave de un sector determinado. Se trata de formulaciones sintéticas que se centran en los aspectos esenciales de cada sector. De esta manera, ofrecen una visión panorámica sobre la progresión del aprendizaje en los doce años de escolaridad[4].

Describen sintéticamente cómo progresa el aprendizaje…

Los Mapas de Progreso no establecen aprendizajes adicionales a los definidos en el Marco Curricular y los Programas de Estudio. Su particularidad consiste en que entregan una visión de conjunto sobre la progresión esperada en todo el sector de aprendizaje.

… de manera congruente con el Marco Curricular y los Programas de Estudio.

En este marco, los Mapas de Progreso son una herramienta que está al servicio del trabajo formativo que realiza el y la docente, entregándoles orientaciones en relación con la trayectoria de los Aprendizajes Esperados de sus estudiantes. Este dispositivo debe ser asumido como complementario al Marco Curricular y, por consiguiente, su utilización es totalmente opcional y voluntaria por parte de las escuelas, las que deberán decidir su uso como referencia de la progresión de aprendizajes, de acuerdo a los análisis de pertinencia que cada comunidad realice.

En definitiva, los Mapas de Progreso constituyen un recurso de apoyo para la labor cotidiana del profesor y la profesora, y resguardan la coherencia de los Aprendizajes Esperados con la estructura curricular vigente que, para el caso de este curso en particular, corresponde a Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica y Media, Actualización 2009.

¿QUÉ UTILIDAD TIENEN LOS MAPAS DE PROGRESO PARA EL TRABAJO DE LOS Y LAS DOCENTES?

Pueden ser un apoyo importante para definir objetivos adecuados, para desarrollar los procesos de enseñanza y para evaluar los respectivos aprendizajes (ver las Orientaciones para planificar y las Orientaciones para evaluar que se presentan en el Programa).

Sirven de apoyo para planificar y evaluar…

4 Los Mapas de Progreso describen en siete niveles el crecimiento habitual del aprendizaje de los y las estudiantes en un ámbito o eje del sector a lo largo de los 12 años de escolaridad obligatoria. Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel 1 corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y las niñas al término de 2° básico; el Nivel 2 corresponde al término de 4° básico, y así sucesivamente. El Nivel 7 describe el aprendizaje de un o una estudiante que al egresar de la educación media es “sobresaliente”; es decir, va más allá de la expectativa para 4° medio que describe el Nivel 6 en cada Mapa.

… y para atender la diversidad al interior del curso.

Además, son un referente útil para atender a la diversidad de estudiantes dentro del aula:

› Permiten no solamente constatar que existen distintos niveles de aprendizaje dentro de un mismo curso, sino que, además, si se usan para analizar los desempeños de las y los estudiantes, ayudan a caracterizar e identificar con mayor precisión en qué consisten esas diferencias.

› La progresión que describen permite reconocer cómo orientar los aprendizajes de los distintos grupos del mismo curso; es decir, de aquellos que no han conseguido el nivel esperado y de aquellos que ya lo alcanzaron o lo superaron.

› Expresan el progreso del aprendizaje en un área clave del sector, de manera sintética y alineada con el Marco Curricular.

RELACIÓN ENTRE MAPA DE PROGRESO, PROGRAMA DE ESTUDIO Y MARCO CURRICULAR

MARCO CURRICULAR

Prescribe los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios que cada estudiante debe lograr.

Ejemplo

Objetivo Fundamental para 4° medio:
Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.

Contenido Mínimo Obligatorio
Formulación y verificación, en casos particulares, de conjeturas respecto de los cuerpos geométricos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas en el espacio.

PROGRAMA DE ESTUDIO

Orienta la labor pedagógica, estableciendo Aprendizajes Esperados que dan cuenta de los OF y CMO, y los organiza temporalmente por medio de unidades.

MAPA DE PROGRESO

Entrega una visión sintética del progreso del aprendizaje en un área clave del sector y se ajusta a las expectativas del Marco Curricular.

Ejemplo

Aprendizaje Esperado 4° medio
Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio.

Ejemplo

Mapa de Progreso “Geometría”

Nivel 7	Conjetura sobre la base de exploraciones realizadas con herramientas tecnológicas y verifica proposiciones…
Nivel 6	Formula conjeturas en relación a la forma de los cuerpos generados a partir de rotaciones y traslaciones de figuras planas en el espacio.
Nivel 5	Formula y verifica conjeturas en relación a los efectos de la aplicación de una transformación a una figura en el plano…
Nivel 4	Formula conjeturas relativas a cambios en el perímetro de polígonos y al volumen de cuerpos geométricos al variar…
Nivel 3	Formula conjeturas relativas a medidas de ángulos en polígonos y a cambios en el área de paralelogramos al variar uno o más….
Nivel 2	Formula y verifica conjeturas relativas a la posibilidad de construir cuerpos a partir de distintas redes…
Nivel 1	Formula y verifica conjeturas, y resuelve problemas relacionados con formas que se generan a partir de transformaciones…

Consideraciones generales para implementar el Programa

Las orientaciones que se presentan a continuación destacan elementos relevantes al momento de implementar el Programa. Estas orientaciones se vinculan estrechamente con algunos de los OFT contemplados en el currículum.

USO DEL LENGUAJE

La lectura, la escritura y la comunicación oral deben promoverse en los distintos sectores de aprendizaje.

Los y las docentes deben promover el ejercicio de la comunicación oral, la lectura y la escritura como parte constitutiva del trabajo pedagógico correspondiente a cada sector de aprendizaje.

Su importancia se basa en que las habilidades de comunicación son herramientas fundamentales que las y los estudiantes deben emplear para alcanzar los aprendizajes propios de cada sector. Se trata de habilidades que no se desarrollan únicamente en el contexto del sector Lenguaje y Comunicación, sino que se consolidan mediante el ejercicio en diversos espacios y en torno a distintos temas y, por lo tanto, involucran a los otros sectores de aprendizaje del currículum.

Cabe mencionar la presencia en los establecimientos de bibliotecas escolares CRA[5], una herramienta que los y las docentes podrían aprovechar al máximo, pues dispone de una variada oferta de recursos de aprendizaje para todas las edades y, además, es de fácil acceso.

Al momento de recurrir a la lectura, la escritura y la comunicación oral, las y los docentes deben procurar en los y las estudiantes:

LECTURA

Estas habilidades se pueden promover de diversas formas.

- La lectura de distintos tipos de textos relevantes para el sector (textos informativos propios del sector, textos periodísticos y narrativos, tablas y gráficos).
- La lectura de textos de creciente complejidad en los que se utilicen conceptos especializados del sector.

5 Centro de Recursos para el Aprendizaje.

- La lectura de textos que promuevan el análisis crítico del entorno.
- La identificación de las ideas principales y la localización de información relevante.
- La realización de resúmenes y síntesis de las ideas y argumentos presentados en los textos.
- El desarrollo de competencias de información, como la búsqueda de información en fuentes escritas, discriminándola y seleccionándola de acuerdo a su pertinencia.
- La comprensión y el dominio de nuevos conceptos y palabras.
- La construcción de sus propias ideas y opiniones a partir del contenido o argumentos presentados en el texto.
- El uso de su biblioteca escolar CRA para fomentar el disfrute de la lectura y el trabajo de investigación.

ESCRITURA

- La escritura de textos de diversa extensión y complejidad (por ejemplo, reportes, ensayos, descripciones y respuestas breves).
- La organización y presentación de información por medio de esquemas o tablas.
- La presentación de las ideas de una manera coherente y clara.
- El uso apropiado del vocabulario en los textos escritos.
- El uso correcto de la gramática y de la ortografía.
- El conocimiento y uso del lenguaje inclusivo.

COMUNICACIÓN ORAL

- La capacidad de exponer ante otras personas.
- La expresión de ideas y conocimientos de manera organizada.
- El desarrollo de la argumentación al formular ideas y opiniones.
- El uso del lenguaje con niveles crecientes de precisión, incorporando los conceptos propios del sector.

- El planteamiento de preguntas para expresar dudas e inquietudes y para superar dificultades de comprensión.
- La disposición para escuchar información de manera oral, manteniendo la atención durante el tiempo requerido.
- La interacción con otras personas para intercambiar ideas, analizar información y elaborar conexiones en relación con un tema en particular, compartir puntos de vista y lograr acuerdos.

USO DE LAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LA COMUNICACIÓN (TIC)

Debe impulsarse el uso de las TIC en todos los sectores de aprendizaje.

El desarrollo de las capacidades para utilizar las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) está contemplado de manera explícita como uno de los Objetivos Fundamentales Transversales del Marco Curricular. Esto demanda que el dominio y uso de estas tecnologías se promueva de manera integrada al trabajo que se lleva a cabo al interior de los sectores de aprendizaje. Para esto, se debe procurar que la labor de las y los estudiantes incluya el uso de las TIC para:

- Buscar, acceder y recolectar información en páginas web u otras fuentes, y seleccionar esta información, examinando críticamente su relevancia y calidad.

Se puede recurrir a diversas formas de uso de estas tecnologías.

- Procesar y organizar datos utilizando plantillas de cálculo, y manipular la información sistematizada en ellas para identificar tendencias, regularidades y patrones relativos a los fenómenos estudiados en el sector.
- Desarrollar y presentar información mediante el uso de procesadores de texto, plantillas de presentación y herramientas y aplicaciones de imagen, audio y video.
- Intercambiar información por medio de las herramientas que ofrece internet, como correo electrónico, chat, espacios interactivos en sitios web y/o comunidades virtuales.
- Identificar y resguardarse de los riesgos potenciales del uso de las TIC, mediante el cuidado personal y el respeto por el otro.
- Respetar y asumir consideraciones éticas en el uso de las TIC, como señalar las fuentes de donde se obtiene la información y seguir las normas de uso y de seguridad de los espacios virtuales.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

En el trabajo pedagógico, los y las docentes deben tomar en cuenta la diversidad entre estudiantes en términos culturales, sociales, de sexo, de género, religiosos, étnicos y respecto de estilos y ritmos de aprendizaje y niveles de conocimiento.

La diversidad entre estudiantes establece desafíos que deben considerarse.

Esa diversidad conlleva desafíos que las y los docentes tienen que contemplar. Entre ellos, cabe señalar:

› Promover el respeto a cada estudiante, en un contexto de valoración y apertura, considerando las diferencias de género y evitando toda forma de discriminación arbitraria.

› Procurar que los aprendizajes se desarrollen de una manera significativa en relación con el contexto y la realidad de las y los estudiantes.

› Intentar que cada estudiante logre los objetivos de aprendizaje señalados en el currículum, integrando la diversidad que se manifiesta entre ellos.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD Y PROMOCIÓN DE APRENDIZAJES

Se debe tener en cuenta que atender a la diversidad de estilos y ritmos de aprendizaje no implica "expectativas más bajas" para algunos estudiantes. Por el contrario, la necesidad de educar en forma diferenciada aparece al constatar que hay que reconocer los requerimientos didácticos personales de las y los estudiantes, para que todas y todos alcancen altos logros. Con esto, se aspira a que cada estudiante alcance los aprendizajes dispuestos para su nivel o grado.

En atención a lo anterior, es conveniente que, al momento de diseñar el trabajo en una unidad, el o la docente considere que precisará más tiempo o métodos pertinentes para que todas y todos sus estudiantes logren los aprendizajes propuestos. Para esto, debe desarrollar una planificación intencionada que genere las condiciones que le permitan:

Es necesario atender a la diversidad para que todos y todas logren los aprendizajes.

› Conocer los diferentes niveles de aprendizaje y conocimientos previos de sus estudiantes.

› Incluir ejemplos y analogías que apelen de manera respetuosa a la diversidad y que incluyan a hombres y mujeres.

› Conocer el contexto y entorno en el cual se desenvuelven sus estudiantes para desarrollar experiencias de aprendizaje significativas.

› Conocer las motivaciones e intereses de sus estudiantes.

› Conocer las fortalezas y habilidades de sus estudiantes para potenciar sus aprendizajes.

Esto demanda conocer qué saben y, sobre esa base, definir con flexibilidad las diversas medidas pertinentes.

- Evaluar y diagnosticar en forma permanente para reconocer las necesidades de aprendizaje.
- Definir la excelencia, considerando el progreso individual como punto de partida.
- Incluir combinaciones didácticas (agrupamientos, trabajo grupal, rincones, entre otras) y materiales diversos (visuales, objetos manipulables, entre otros).
- Evaluar de distintas maneras a sus estudiantes y dar tareas con múltiples opciones.
- Promover la confianza de sus estudiantes en sí mismos y el valor de aprender.
- Promover un trabajo sistemático por parte de sus estudiantes y ejercitación abundante.

ENSEÑAR A CONSTRUIR LA IGUALDAD DE GÉNERO DESDE LA PRÁCTICA

Tal como hombres y mujeres tienden a cumplir roles diferentes en la sociedad, debido entre otras cosas a la socialización, también niños y niñas tienden a cumplir roles diferentes en la sala de clases. El espacio escolar debe proporcionar experiencias de colaboración entre niñas y niños, hombres y mujeres, que les permitan lograr objetivos compartidos desde una posición de igualdad. Se recomienda a las y los docentes que:

- **Propicien la reflexión y discusión sobre temas de género,** realizando actividades que incentiven el reconocimiento de los roles, lenguajes y estereotipos con los que se identifican sus estudiantes, y así reflexionen y compartan opiniones sobre ello.
- **Eviten reforzar estereotipos,** enseñando que no existen actividades laborales propias solo de las mujeres o de los hombres, como por ejemplo las profesiones científicas o las de cuidado de otros.
- **Pongan atención a la forma en que se refieren a los y las estudiantes,** visibilizando tanto a hombres como a mujeres, niñas y niños, profesoras y profesores, y evitando sesgos en el trato.
- **Erradiquen toda forma de discriminación en sus estudiantes,** no pasando por alto las bromas, apodos, acciones de discriminación o actos humillantes basados en las supuestas diferencias entre hombres y mujeres. Por ejemplo, denostar a un estudiante al que le gusta bailar, atribuyéndole características femeninas con el fin de humillarlo.

- **Eviten la rivalidad entre los géneros,** aplicando metodologías que favorezcan el desarrollo de competencias de forma igualitaria, donde la relación entre los géneros sea de cooperación y autonomía. Por ejemplo, mediante la conformación de equipos mixtos que permitan que las y los estudiantes se reconozcan en función de sus capacidades, talentos e intereses individuales.
- **Promuevan la actividad física y el deporte de manera equitativa entre hombres y mujeres,** ya que son necesarios para llevar una vida saludable, independientemente del sexo.
- **Promuevan espacios o instancias de expresión de emociones y sentimientos,** por ejemplo, conversando con sus estudiantes acerca de la necesidad de expresar sentimientos, y sin coartar la expresión de sus afectos y emociones.
- **Eviten presentar como naturales diferencias entre hombres y mujeres que son culturalmente adquiridas,** por ejemplo, considerar que las mujeres son más aptas para estudiar carreras del ámbito de la salud, debido a la supuesta condición natural que poseen para cuidar u ocuparse de otros, como si fuera la extensión de su maternidad.

Orientaciones para planificar

La planificación favorece el logro de los aprendizajes.

La planificación es un elemento central en el esfuerzo por promover, dirigir y garantizar los aprendizajes de los y las estudiantes. Permite maximizar el uso del tiempo y definir los procesos y recursos necesarios para lograr los aprendizajes que se deben alcanzar.

El Programa sirve de apoyo a la planificación mediante un conjunto de elementos elaborados para este fin.

Los Programas de Estudio del Ministerio de Educación constituyen una herramienta de apoyo al proceso de planificación. Para estos efectos han sido elaborados como un material flexible que las y los docentes pueden adaptar a su realidad en los distintos contextos educativos del país.

El principal referente que entrega el Programa de Estudio para planificar son los Aprendizajes Esperados. De manera adicional, el Programa apoya la planificación por medio de la propuesta de unidades, de la estimación del tiempo cronológico requerido en cada una y de la sugerencia de actividades para desarrollar los aprendizajes.

CONSIDERACIONES GENERALES PARA REALIZAR LA PLANIFICACIÓN

La planificación es un proceso que se recomienda llevar a cabo considerando los siguientes aspectos:

Se debe planificar tomando en cuenta la diversidad, el tiempo real, las prácticas anteriores y los recursos disponibles.

- La diversidad de ritmos y estilos de aprendizaje de los y las estudiantes del curso, lo que implica planificar considerando desafíos para los distintos grupos de estudiantes.
- El tiempo real con que se cuenta, de manera de optimizar el tiempo disponible.
- Las prácticas pedagógicas que han dado resultados satisfactorios.
- Los recursos para el aprendizaje con que cuenta: textos escolares, materiales didácticos, recursos elaborados por la escuela, laboratorio y materiales disponibles en la biblioteca escolar CRA, entre otros.
- En el caso de una actividad que contemple el uso de la biblioteca escolar CRA, sobre todo en aquellas de investigación, se recomienda coordinarse anticipadamente con el encargado o coordinador pedagógico de la biblioteca escolar.

SUGERENCIAS PARA EL PROCESO DE PLANIFICACIÓN

Para que la planificación efectivamente ayude al logro de los aprendizajes, debe estar centrada en ellos y desarrollarse a partir de una visión clara de lo que las y los estudiantes deben y pueden aprender. Para alcanzar este objetivo, se recomienda elaborar la planificación en los siguientes términos:

› Comenzar por una especificación de los Aprendizajes Esperados que no se limite a listarlos. Una vez identificados, es necesario desarrollar una idea lo más clara posible de las expresiones concretas que puedan tener. Esto implica reconocer qué desempeños de los y las estudiantes demuestran el logro de los aprendizajes. Se deben poder responder preguntas como: “¿Qué deberían ser capaces de demostrar las y los estudiantes que han logrado un determinado Aprendizaje Esperado?” o “¿Qué habría que observar para saber que un aprendizaje ha sido logrado?”.

Lograr una visión lo más clara y concreta posible sobre los desempeños que dan cuenta de los aprendizajes…

› A partir de las respuestas a esas preguntas, decidir las evaluaciones que se llevarán a cabo y las estrategias de enseñanza. Específicamente, se requiere identificar qué tarea de evaluación es más pertinente para observar el desempeño esperado y qué modalidades de enseñanza facilitarán alcanzar este desempeño. De acuerdo con este proceso, se deben definir las evaluaciones formativas y sumativas, las actividades de enseñanza y las instancias de retroalimentación.

… y, sobre esa base, decidir las evaluaciones, las estrategias de enseñanza y la distribución temporal.

Las y los docentes pueden complementar los Programas con los Mapas de Progreso, que entregan elementos útiles para reconocer el tipo de desempeño asociado a los aprendizajes.

Se sugiere seleccionar alguno(s) de los periodos de planificación presentados, de acuerdo al contexto de cada institución escolar.

LA PLANIFICACIÓN ANUAL

En este proceso, los y las docentes deben distribuir los Aprendizajes Esperados a lo largo del año escolar considerando su organización por unidades, estimar el tiempo que se requerirá para cada unidad y priorizar las acciones que conducirán a logros académicos significativos.

La planificación anual se debe llevar a cabo con una visión realista de los tiempos disponibles durante el año.

Para esto las y los docentes tienen que:

› Alcanzar una visión sintética del conjunto de aprendizajes a lograr durante el año, dimensionando el tipo de cambio que se debe observar en los y las estudiantes. Esto debe desarrollarse según los Aprendizajes Esperados especificados en los Programas. Los Mapas de Progreso pueden resultar un apoyo importante.

› Identificar, en términos generales, el tipo de evaluación que se requerirá para verificar el logro de los aprendizajes. Esto permitirá desarrollar una idea de las demandas y los requerimientos a considerar para cada unidad.

› Sobre la base de esta visión, asignar los tiempos a destinar a cada unidad. Para que esta distribución resulte lo más realista posible, se recomienda:
  - Listar días del año y horas de clase por semana para estimar el tiempo disponible.
  - Elaborar una calendarización tentativa de los Aprendizajes Esperados para el año completo, considerando los feriados, los días de prueba y de repaso, la realización de evaluaciones formativas y la entrega de retroalimentación.
  - Hacer una planificación gruesa de las actividades de acuerdo con la calendarización.
  - Ajustar permanentemente la calendarización o las actividades planificadas.

LA PLANIFICACIÓN DE LA UNIDAD

Es preciso realizar este proceso sin perder de vista la meta de aprendizaje de la unidad.

Implica tomar decisiones más precisas sobre qué enseñar y cómo enseñar, considerando la necesidad de ajustarlas a los tiempos asignados a la unidad. La planificación de la unidad debiera seguir los siguientes pasos:

› Especificar la meta de la unidad. Al igual que la planificación anual, esta visión debe sustentarse en los Aprendizajes Esperados de la unidad y se recomienda complementarla con los Mapas de Progreso.

› Idear una herramienta de diagnóstico de inicio de la unidad.

› Crear una evaluación sumativa para la unidad.

› Calendarizar los Aprendizajes Esperados por semana.

› Establecer las actividades de enseñanza que se desarrollarán.

› Generar un sistema de seguimiento de los Aprendizajes Esperados, especificando los tiempos y las herramientas para realizar evaluaciones formativas y entregar retroalimentación.

› Ajustar el plan continuamente ante los requerimientos de las y los estudiantes.

LA PLANIFICACIÓN DE CLASE

Es imprescindible que cada clase sea diseñada considerando que todas sus partes estén alineadas con los Aprendizajes Esperados que se busca promover y con la evaluación que se utilizará. Recuerde que el clima escolar influye directamente en la calidad de los aprendizajes, por lo que es importante crear todas las condiciones propicias para el aprendizaje, con especial énfasis en las relaciones de convivencia entre los y las estudiantes, y de estos con las y los docentes.

Es fundamental procurar que los estudiantes sepan qué y por qué van a aprender, qué aprendieron y de qué manera.

Adicionalmente, se recomienda que cada clase sea diseñada distinguiendo su inicio, desarrollo y cierre, y especificando claramente qué elementos se considerarán en cada una de estas partes. Se requiere tomar en cuenta aspectos como los siguientes:

Inicio

En esta fase se debe procurar que los y las estudiantes conozcan el propósito de la clase; es decir, qué se espera que aprendan. A la vez, se debe buscar captar su interés y que visualicen cómo se relaciona lo que aprenderán con lo que ya saben y con las clases anteriores.

Desarrollo

En esta etapa las y los docentes llevan a cabo la actividad contemplada para la clase.

Cierre

Este momento puede ser breve (5 a 10 minutos), pero es central. En él se debe procurar que los y las estudiantes se formen una visión acerca de qué aprendieron y cuál es la utilidad y relación de las estrategias y experiencias desarrolladas con su entorno y realidad cotidiana para promover un aprendizaje significativo.

Orientaciones para evaluar

Apoya el proceso de aprendizaje al permitir su monitoreo, retroalimentar a los estudiantes y sustentar la planificación.

La evaluación forma parte constitutiva del proceso de enseñanza. No se debe usar solo como un medio para controlar qué saben las y los estudiantes, sino que, además, desempeña un rol central en la promoción y el desarrollo del aprendizaje. Para que cumpla efectivamente con esta función, debe tener como objetivos:

› Ser un recurso para medir el progreso en el logro de los aprendizajes.

› Proporcionar información que permita conocer las fortalezas y debilidades de los y las estudiantes y, sobre esta base, retroalimentar la enseñanza y potenciar los logros esperados dentro del sector.

› Ser una herramienta útil para la planificación.

› Ser una herramienta que permita la autorregulación de las y los estudiantes.

¿CÓMO PROMOVER EL APRENDIZAJE POR MEDIO DE LA EVALUACIÓN?

Las evaluaciones adquieren su mayor potencial para promover el aprendizaje si se llevan a cabo considerando lo siguiente:

Explicitar qué se evaluará.

› Informar a los y las estudiantes sobre los aprendizajes que se evaluarán. Esto facilita que puedan orientar su actividad hacia el logro de los aprendizajes que deben alcanzar.

Identificar logros y debilidades.

› Elaborar juicios sobre el grado en que se logran los aprendizajes que se busca alcanzar, fundados en el análisis de los desempeños de las y los estudiantes. Las evaluaciones entregan información para conocer sus fortalezas y debilidades. El análisis de esta información permite tomar decisiones para mejorar los resultados alcanzados.

› Promover la autoevaluación entre los y las estudiantes.

Ofrecer retroalimentación.

› Retroalimentar a las y los estudiantes sobre sus fortalezas y debilidades. Compartir esta información con ellas y ellos permite orientarlos acerca de los pasos que deben seguir para avanzar. También les da la posibilidad de desarrollar procesos metacognitivos y reflexivos destinados a favorecer sus propios aprendizajes, lo que, a su vez, facilita que se involucren y se comprometan con estos.

¿CÓMO SE PUEDEN ARTICULAR LOS MAPAS DE PROGRESO DEL APRENDIZAJE CON LA EVALUACIÓN?

Los Mapas de Progreso ponen a disposición de las escuelas y liceos de todo el país un mismo referente para observar el desarrollo del aprendizaje de los y las estudiantes y los ubican en un continuo de progreso. Los Mapas de Progreso apoyan el seguimiento de los aprendizajes, pues permiten:

Los Mapas apoyan diversos aspectos del proceso de evaluación.

› Reconocer aquellos aspectos y dimensiones esenciales de evaluar.

› Aclarar la expectativa de aprendizaje nacional al conocer la descripción de cada nivel, sus ejemplos de desempeño y el trabajo concreto de estudiantes que ilustran esta expectativa.

› Observar el desarrollo, la progresión o el crecimiento de las competencias de una o un estudiante al constatar cómo sus desempeños se van desplazando en el Mapa.

› Contar con modelos de tareas y preguntas que permiten a cada estudiante evidenciar sus aprendizajes.

¿CÓMO DISEÑAR LA EVALUACIÓN?

La evaluación debe diseñarse a partir de los Aprendizajes Esperados, con el objeto de observar en qué grado se alcanzan. Para lograrlo, se recomienda diseñar la evaluación junto con la planificación y considerar las siguientes preguntas:

Es necesario partir estableciendo los Aprendizajes Esperados a evaluar…

› ¿Cuáles son los Aprendizajes Esperados del Programa que abarcará la evaluación?

Si debe priorizar, considere aquellos aprendizajes que serán duraderos y prerrequisitos para desarrollar otros aprendizajes. Para esto, los Mapas de Progreso pueden ser de especial utilidad.

› ¿Qué evidencia necesitarían exhibir sus estudiantes para demostrar que dominan los Aprendizajes Esperados?

Se recomienda utilizar como apoyo los Indicadores de Evaluación que presenta el Programa.

… y luego decidir qué se requiere para su evaluación en términos de evidencias, métodos, preguntas y criterios.

› ¿Qué método empleará para evaluar?

Es recomendable utilizar instrumentos y estrategias de diverso tipo (pruebas escritas, guías de trabajo, informes, ensayos, entrevistas, debates, mapas conceptuales, informes de laboratorio e investigaciones, entre otros).

En lo posible, se deben presentar situaciones que puedan resolverse de distintas maneras y con diferentes grados de complejidad, para que los diversos estudiantes puedan solucionarlas y así mostrar sus distintos niveles y estilos de aprendizaje.

› ¿Qué preguntas incluirá en la evaluación?

Se deben formular preguntas rigurosas y alineadas con los Aprendizajes Esperados, que permitan demostrar la real comprensión del contenido evaluado.

› ¿Cuáles son los criterios de éxito? ¿Cuáles son las características de una respuesta de alta calidad?

Esto se puede responder con distintas estrategias. Por ejemplo:

- Comparar las respuestas de sus estudiantes con las mejores respuestas de otros estudiantes de edad similar. Se pueden usar los ejemplos presentados en los Mapas de Progreso.
- Identificar respuestas de evaluaciones previamente realizadas que expresen el nivel de desempeño esperado y utilizarlas como modelo para otras evaluaciones aplicadas en torno al mismo aprendizaje.
- Desarrollar rúbricas que indiquen los resultados explícitos para un desempeño específico y que muestren los diferentes niveles de calidad para dicho desempeño.

Matemática

Matemática

PROPÓSITOS

El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana. Entre ellas se encuentran el cálculo, el análisis de la información proveniente de diversas fuentes y la capacidad de generalizar situaciones, formular conjeturas, evaluar la validez de resultados y seleccionar estrategias para resolver problemas. Todo esto contribuye a desarrollar un pensamiento lógico, ordenado, crítico y autónomo, y a generar actitudes como precisión, rigurosidad, perseverancia y confianza en sí mismo, que se valoran no solo en la ciencia y la tecnología, sino también en la vida cotidiana.

Aprender matemática acrecienta también las habilidades relativas a la comunicación; por una parte, enseña a presentar información con precisión y rigurosidad y, por otra, a demandar exactitud y rigor en las informaciones y argumentos que se reciben.

El conocimiento matemático y la capacidad para usarlo provocan importantes consecuencias en el desarrollo, el desempeño y la vida de las personas. Aprender matemática permite, a las y los estudiantes, dar respuesta a interrogantes y problemas de diferentes campos de conocimiento o a distintos fenómenos de la vida cotidiana. Por lo tanto, contribuye a que se desarrollen como personas autónomas que se valoran a sí mismas.

La matemática ofrece también la posibilidad de trabajar con entes abstractos y sus relaciones, y prepara a los y las estudiantes para que entiendan el medio y las múltiples relaciones que se dan en un espacio simbólico y físico de complejidad creciente. En este espacio, la cultura, la tecnología y las ciencias se redefinen en forma permanente y se hacen más difíciles, y las finanzas, los sistemas de comunicación entre naciones y culturas se relacionan y globalizan.

HABILIDADES

Al estudiar matemática, la y el estudiante desarrolla el razonamiento lógico, la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas.

A continuación, se presenta una tabla que permite:

› Observar transversalmente las habilidades que se desarrollan en el sector.

› Focalizarse en un nivel y diseñar actividades y evaluaciones que enfaticen dichas habilidades.

› Situarse en el nivel, observar las habilidades que se trabajaron en años anteriores y las que se trabajarán más adelante.

› Advertir diferencias y similitudes en los énfasis por ciclos de enseñanza.

HABILIDADES DE PENSAMIENTO MATEMÁTICO					
7° básico	8° básico	1° medio	2° medio	3° medio	4° medio
Resolver problemas en contextos diversos y significativos, utilizando los contenidos del nivel.	Resolver problemas en contextos diversos y significativos.	Analizar estrategias de resolución de problemas de acuerdo con criterios definidos.	Aproximar números mediante variados métodos.	Resolver problemas con un campo numérico más amplio.	Resolver problemas utilizando datos estadísticos.
Analizar la validez de los procedimientos utilizados y de los resultados obtenidos.	Evaluar la validez de los resultados obtenidos y el empleo de dichos resultados para fundamentar opiniones y tomar decisiones.		Argumentar respecto de las variaciones que se producen en la representación gráfica de funciones.	Argumentar la validez de conjeturas y proposiciones.	Argumentar con respecto a la confiabilidad de la información.
				Formular conjeturas generalizando en forma algebraica.	
Ordenar números y ubicarlos en la recta numérica.			Ubicar raíces en la recta numérica.	Ubicar números complejos en el plano complejo.	Ubicar objetos geométricos en el espacio.
Realizar cálculos en forma mental y escrita.	Hacer cálculos en forma mental y escrita.			Realizar cálculos en forma mental, escrita y con calculadora.	
Emplear formas simples de modelamiento matemático.	Emplear formas simples de modelamiento matemático.	Aplicar modelos lineales que representan la relación entre variables.	Modelar situaciones diversas mediante funciones.	Modelar situaciones diversas mediante funciones.	Modelar situaciones diversas y fenómenos mediante funciones.
	Verificar proposiciones simples, para casos particulares.	Diferenciar entre verificación y demostración de propiedades.	Demostrar propiedades y teoremas.	Demostrar propiedades y proposiciones.	Utilizar propiedades y proposiciones en el proceso de resolución de problemas.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS

Se ha concebido este sector como una oportunidad para que los y las estudiantes construyan aprendizajes de vida. La matemática es un área poderosa de la cultura, pues permite comprender, explicar y predecir situaciones y fenómenos del entorno. Por eso, es importante que las y los docentes se esfuercen para que cada estudiante del país aprenda los conocimientos y desarrolle las capacidades propias de esta disciplina. Estos Programas entregan algunas orientaciones que ayudarán a los y las docentes a cumplir con este objetivo por medio de la planificación, en el transcurso de las clases.

LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS: PROFUNDIDAD E INTEGRACIÓN

Los y las estudiantes deben explorar en las ideas matemáticas y entender que ellas constituyen un todo y no fragmentos aislados del saber. Es necesario que vivan variadas experiencias para que comprendan en profundidad los conceptos matemáticos, sus conexiones y sus aplicaciones; de esta manera, podrán participar activamente y adquirir mayor confianza para investigar y aplicar la matemática. Por ello, se recomienda que las y los estudiantes usen materiales concretos, lleven a cabo trabajos prácticos y se apoyen en la aplicación de tecnología, de tal manera de potenciar la formulación y verificación de conjeturas y, así, desarrollar progresivamente el razonamiento matemático.

EL USO DEL CONTEXTO

Es importante que el y la docente aclare que esta disciplina está enraizada en la cultura y en la historia, que impacta en otras áreas del conocimiento científico, que crea consecuencias y que permite desarrollar aplicaciones. Preguntarse cómo y en qué periodos de la historia se originaron los conceptos y modelos matemáticos y cómo se enlazaron con la evolución del pensamiento permite enriquecer el aprendizaje. En este sentido, se recomienda usar analogías y representaciones cercanas a las y los estudiantes, en especial, en las etapas de exploración, así como también aplicar la matemática en otras áreas del saber y en la vida diaria como un modo de apoyar la construcción del conocimiento matemático.

PENSAMIENTO MATEMÁTICO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Esta disciplina se construye sobre la base de regularidades que subyacen a situaciones aparentemente diversas, y ayuda a razonar en vez de actuar de modo mecánico. Por eso, es importante invitar a los y las estudiantes a buscar regularidades. También es fundamental que desarrollen y expliquen la noción de “estrategia”, que comparen diversas formas de abordar problemas y que justifiquen y demuestren las proposiciones matemáticas. Asimismo, la y el docente debe procurar que los y las estudiantes formulen y verifiquen conjeturas y que analicen los procedimientos para resolver un problema y justificar los resultados.

Aun cuando las y los estudiantes deben ser competentes en diversas habilidades matemáticas, la o el docente debe evitar que se enfoquen en los procedimientos si no comprenden los principios matemáticos correspondientes.

USO DEL ERROR

Usar adecuadamente el error ayuda a crear un ambiente de búsqueda y creación. Un educador o una educadora puede aprovechar la equivocación para inducir aprendizajes especialmente significativos, si lo hace de manera constructiva. Se debe considerar el error como un elemento concreto para trabajar la diversidad en clases y permitir que cada estudiante alcance los aprendizajes propuestos.

APRENDIZAJE MATEMÁTICO Y DESARROLLO PERSONAL

La clase de Matemática ofrece abundantes ocasiones para el autoconocimiento y las interacciones sociales. Es una oportunidad para la metacognición[6], para formularse preguntas como "¿Cómo lo hice?" o "¿De qué otra manera es posible?". Además, la percepción que cada cual tiene de su propia capacidad para aprender y hacer matemática surge de la retroalimentación que le ha dado la propia experiencia. En ese sentido, el o la docente tiene en sus manos un poderoso instrumento: reconocer los esfuerzos y los logros de los y las estudiantes. Para promover la confianza y la autoestima en cada estudiante, la o el docente puede intencionar una comunicación reflexiva que permita explicar las relaciones entre los conceptos matemáticos, centrándose en las estrategias y procedimientos aplicados tanto por el grupo curso como por cada estudiante, valorando la diversidad de soluciones y estimulando el análisis de los errores realizados al resolver el problema.

Es importante incentivar a las y los estudiantes a ser parte activa de las distintas instancias de clases e interacciones docente-estudiantes. Las y los docentes deben dar estímulos igualitarios para que las y los jóvenes se involucren de la misma manera tanto en los ejercicios prácticos como en las respuestas y preguntas en clases. Se espera también que los y las docentes incentiven la confianza y la empatía de cada estudiante hacia el aprendizaje de la matemática, por medio de experiencias y situaciones cercanas a sus intereses.

TECNOLOGÍAS DIGITALES Y APRENDIZAJE MATEMÁTICO

El presente Programa propone usar *software* y ambientes digitales para ampliar las oportunidades de aprendizaje de los y las estudiantes. Estas tecnologías permiten representar nociones abstractas por medio de modelos en los que se puede experimentar con ideas matemáticas, y posibilitan crear situaciones para que las y los estudiantes exploren las características, los límites y las posibilidades de conceptos, relaciones o procedimientos matemáticos. Los procesadores geométricos, simbólicos y de estadística son laboratorios para investigar relaciones y ponerlas a prueba. Con un procesador simbólico se puede analizar y entender números grandes o muy pequeños, y también estudiar el comportamiento de funciones, incluso las de alta complejidad. Internet ofrece múltiples ambientes con representaciones dinámicas de una gran cantidad de objetos matemáticos. Los procesadores geométricos permiten experimentar con nociones y relaciones de la geometría euclidiana, cartesiana o vectorial. En conclusión, el uso de dichos *software* configura un espacio atractivo para los y las estudiantes que los ayudará a formarse para una vida cada vez más influida por las tecnologías digitales.

CLIMA Y MOTIVACIÓN

Es fundamental propiciar un ambiente creativo para que los y las estudiantes formulen, verifiquen o refuten conjeturas respecto de los problemas que abordan. Ese ambiente debe admitir que el error, la duda y la pregunta son importantes y valiosos para construir conocimientos y emplear los aportes de todos para crear una búsqueda y construcción colectiva. En ese espacio será posible analizar acciones y procedimientos y buscar caminos alternativos.

6 Metacognición: conocimiento de la propia actividad cognitiva y la habilidad para comprender y controlar los procesos cognitivos propios.

USO DE LA BIBLIOTECA ESCOLAR CRA

Se espera que las y los estudiantes visiten la biblioteca escolar CRA y exploren distintos recursos de aprendizaje para satisfacer sus necesidades e intereses mediante el acceso a lecturas de interés y numerosas fuentes, así como para desarrollar competencias de información e investigación. Para ello, es necesario coordinar el trabajo entre docentes y encargados de biblioteca para implementar actividades que efectivamente respondan a los Objetivos Fundamentales que se buscan lograr. La biblioteca escolar CRA puede ser un importante lugar de encuentro para la cooperación y participación de la comunidad educativa. Esta puede cumplir la función de acopio de la información generada por docentes y estudiantes en el proceso de aprendizaje, de manera de ponerla a disposición de todos. Tanto los documentos de trabajo como los materiales concretos producidos pueden conformar una colección especializada dentro del establecimiento.

Visión global
del año

APRENDIZAJES ESPERADOS POR SEMESTRE Y UNIDAD | CUADRO SINÓPTICO

SEMESTRE 1		SEMESTRE 2	
UNIDAD 1	UNIDAD 2	UNIDAD 3	UNIDAD 4
Álgebra	Geometría	Datos y azar 1	Datos y azar 2
AE 01 Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $\|z\| \leq 3$.	**AE 04** Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas.	**AE 08** Evaluar críticamente información estadística extraída de medios de comunicación, tales como periódicos y revistas, o de internet.	**AE 11** Aproximar, a partir de histogramas de distribuciones binomiales, el gráfico de la campana de Gauss.
AE 02 Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.	**AE 05** Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas.	**AE 09** Interpretar el concepto de variable aleatoria continua.	**AE 12** Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.
AE 03 Determinar la función inversa de una función dada que sea invertible.	**AE 06** Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio.	**AE 10** Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua.	**AE 13** Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados.
	AE 07 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.		**AE 14** Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\|X\|$ de muestras aleatorias del tamaño n, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra.

SEMESTRE 1		SEMESTRE 2	
UNIDAD 1	**UNIDAD 2**	**UNIDAD 3**	**UNIDAD 4**
			AE 15 Modelar situaciones de la vida diaria o de las ciencias naturales con distribuciones aleatorias, como la distribución binomial o la distribución normal.
25 horas pedagógicas	32 horas pedagógicas	20 horas pedagógicas	37 horas pedagógicas

Semestre

1

UNIDAD 1

ÁLGEBRA

PROPÓSITO

En esta unidad, se espera que las y los estudiantes profundicen en el concepto de función, desarrollando sus conocimientos sobre la función potencia y trabajando la función inversa de aquellas tratadas en cursos anteriores.

Además, se busca que amplíen sus conocimientos sobre los sistemas 2x2 de ecuaciones lineales y que resuelvan sistemas de inecuaciones lineales de forma algebraica y por medio de representaciones.

El énfasis de esta unidad está en que los y las estudiantes sean capaces de determinar la inversa de funciones dadas y de reconocer situaciones que se modelan mediante la función potencia. Asimismo, se pretende que perfeccionen el tratamiento algorítmico en diferentes conjuntos numéricos y que amplíen su lenguaje matemático, lo cual debieran demostrar en explicaciones y argumentos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Función cuadrática, ecuación de segundo grado, función exponencial y representación gráfica, función logarítmica y representación gráfica, función raíz cuadrada y representación gráfica, sistemas 2x2 de ecuaciones lineales con dos incógnitas, métodos de resolución de un sistema 2x2 de ecuaciones lineales con dos incógnitas, gráfica de un sistema 2x2 de ecuaciones lineales, expresiones algebraicas fraccionarias, operaciones de expresiones algebraicas fraccionarias.

CONCEPTOS CLAVE

Potencia, función inversa de una función, inecuaciones lineales, tratamiento algorítmico, lenguaje matemático, explicaciones, argumentos.

CONTENIDOS

- Función potencia.
- Función inversa de una función.
- Sistemas de inecuaciones lineales.

HABILIDADES

- Representar gráficamente funciones inversas y la función potencia.
- Argumentar sobre la función inversa dada una función.
- Modelar situaciones de cambio potencial.
- Resolver problemas relacionados con la función potencia utilizando algoritmos.
- Resolver sistemas de inecuaciones lineales.

ACTITUDES

- Interés por conocer la realidad al trabajar con información cuantitativa de diversos contextos.

APRENDIZAJES ESPERADOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Las y los estudiantes que han logrado este aprendizaje:*
AE 01 Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $\|z\| \leq 3$.	› Desarrollan ecuaciones funcionales del tipo $f(x) = x^{-1}$, mediante tablas de proporcionalidad inversa. › Elaboran gráficos de la función potencia $f(x) = x^z$ con $\|z\| \leq 3$. › Determinan simetrías y asíntotas de los gráficos. › Resuelven problemas matemáticos, de ciencias naturales o de economía, mediante funciones potencia.
AE 02 Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.	› Elaboran las inecuaciones lineales que modelan el fenómeno involucrado en un problema. › Representan gráficamente el conjunto solución de un sistema de inecuaciones lineales. › Comprueban en forma gráfica y algebraica si un par (x,y) pertenece o no al conjunto solución de un problema. › Comunican soluciones a problemas relativos a inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.
AE 03 Determinar la función inversa de una función dada que sea invertible.	› Caracterizan la función inversa de una función invertible dada, mediante la metáfora de una máquina que puede revertir su acción inicial. › Argumentan acerca de las condiciones que debe cumplir una función para que exista su inversa. › Grafican una función y su inversa en el plano cartesiano. › Generan, si existe, la función inversa a partir de la función dada.

OFT	APRENDIZAJES ESPERADOS EN RELACIÓN CON LOS OFT

› Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.

› Buscar y acceder a información de diversas fuentes virtuales.

› Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA UNIDAD

En esta unidad, es importante que el o la docente incentive a las y los estudiantes a desarrollar progresivamente habilidades que potencien el razonamiento matemático desde una perspectiva de proceso que implique lo siguiente: analizar e interpretar situaciones particulares que permitan abordar y comprender el enunciado del problema; representar los datos contenidos en dichos enunciados de manera pictórica, y utilizando *software*, para potenciar la modelación matemática; inferir y explicar regularidades aritméticas, algebraicas y/o geométricas que permitan encontrar la solución del problema; y formular y verificar generalizaciones si el problema a resolver lo permite.

Respecto de la función potencia, se recomienda a la o el docente presentar problemas contextualizados que impliquen analizar e interpretar la proporcionalidad inversa como función. Los y las estudiantes deben comprender que las funciones potencia permiten modelar situaciones de la vida cotidiana (por ejemplo, de las ciencias naturales) e interpretar las soluciones de los problemas desde el punto de vista aritmético, algebraico y/o geométrico, según corresponda. Se sugiere a la o el docente dar la oportunidad de que los y las estudiantes visualicen en un gráfico que las asíntotas de toda función están relacionadas con el concepto de límite, el cual es construido de forma intuitiva.

En relación con los sistemas de inecuaciones lineales, es imprescindible que las y los estudiantes representen e interpreten dicho sistema gráficamente en un plano cartesiano o empleando *software* para facilitar la visualización e inferir posibles generalizaciones.

Con respecto a la función inversa de una función dada, es recomendable introducir este concepto entregando diversos ejemplos en forma pictórica y simbólica. Además, se sugiere a la o el docente llevar a cabo un análisis geométrico de cada ecuación de la recta al representar el sistema de ecuación lineal en el plano cartesiano, para que los y las estudiantes puedan inferir que una función creciente implica argumentar que "Si $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$", y que una función decreciente implica verificar que "Si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$". Esto les permitirá interpretar las soluciones del sistema de ecuación lineal en función del contexto del problema; por ejemplo, si las ecuaciones de la recta representan funciones decrecientes, una interpretación posible sería: "A menor cantidad de artículos producidos ($x_1 < x_2$), mayor es el gasto de energía ($f(x_1) > f(x_2)$)".

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Las sugerencias de actividades presentadas a continuación pueden ser seleccionadas, adaptadas y/o complementadas por la o el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 01 Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $|z| \leq 3$.

1. Dada la siguiente clase de valores de la función potencia $f(x) = x^z$; ($z = 3, 2, -1, -2, -3$):

   a. Confeccionan tablas para cada una de las funciones, considerando $-3 \leq x \leq 3$.

   b. Dibujan, en el mismo sistema de coordenadas, los gráficos de $f(x) = x^2$ y $f(x) = x^{-2}$, utilizando las tablas elaboradas anteriormente.

   c. Dibujan, en el mismo sistema de coordenadas, los gráficos de $f(x) = x^1$, $f(x) = x^{-1}$, $f(x) = x^3$ y $f(x) = x^{-3}$, utilizando las tablas elaboradas anteriormente.

   d. Conjeturan acerca de las asíntotas y del tipo de simetrías que se presentan en las gráficas de las funciones con exponente par y de las funciones con exponente impar.

   e. Argumentan las conjeturas anteriores mediante el uso de *software* con otros exponentes enteros.

Observaciones a la o el docente

Para esta actividad, se sugiere que las y los estudiantes utilicen un *software* para visualizar y analizar las representaciones en el plano cartesiano de funciones potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $|z| \leq 3$. Por ejemplo:

Gráfico 1

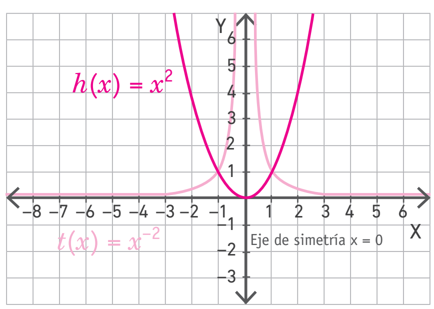
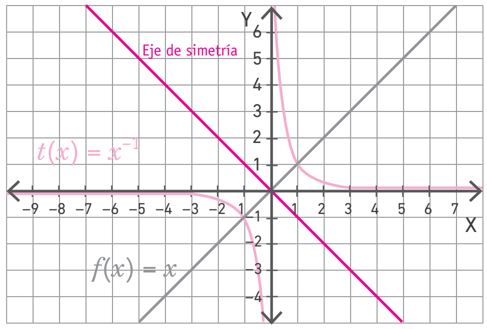
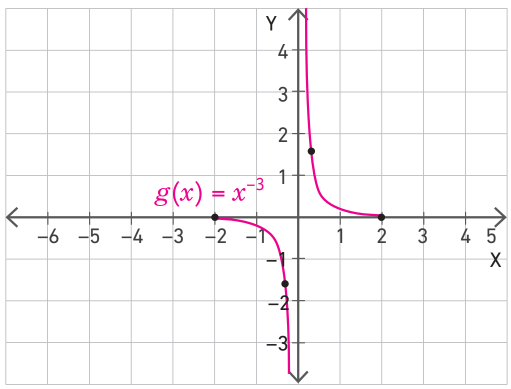


Gráfico 2



El o la estudiante debe verificar la veracidad o falsedad de las conjeturas planteadas para el tipo de simetría cuando z es par y cuando z es impar (gráfico 1 y 2). Por otra parte, el o la docente puede guiar a las y los estudiantes a inferir y justificar si $x = 0$ e $y = 0$ son asíntotas o no para $f(x) = x^{-3}$ (gráfico 3). Al mismo tiempo, puede orientarlos a concluir que el eje de simetría $x = 0$ para $t(x) = x^{-2}$ también es asíntota.

Gráfico 3



La o el docente puede promover diferentes niveles de análisis disciplinar relacionados con el desarrollo del razonamiento matemático. Cabe destacar que el proceso de argumentar está presente en todos los momentos de la actividad matemática en los que se afirma algo o en los que se quiere garantizar la verdad o falsedad de generalizaciones. En este contexto, se sugiere explicar a las y los estudiantes que el proceso de generar argumentos tiene un carácter social y cobra sentido cuando emerge la necesidad de garantizar la validez de un concepto o propiedad en matemática, ya que la demostración permite el cambio de estatus de una afirmación entendida como una conjetura a una generalización validada que es aceptada.

Al finalizar la actividad, la o el docente puede orientar a las y los estudiantes a demostrar qué funciones corresponden a una función par o a una función impar. Por ejemplo:

1. Demostrar que $f(x) = x^2 \ / \ x \in \mathbb{R}$ es una función par.

   Las y los estudiantes deben considerar que una función es par si y solo si $f(x) = f(-x)$.

   $f(x) = x^2$
   $f(x) = x^2 = (-x)^2$
   $f(x) = f(-x)$

   Por lo tanto, $f(x) = x^2$ es una función par.

2. Demostrar que $g(x) = x^3 \ / \ x \in \mathbb{R}$, g es una función impar.

   Las y los estudiantes deben considerar que una función es impar si y solo si $g(-x) = -g(x)$.

   $g(x) = x^3$
   $g(-x) = (-x)^3$
   $g(-x) = -(x)^3$
   $g(-x) = -g(x)$

   Por lo tanto, $g(x) = x^3$ es una función impar.

Además, la o el docente puede orientar a justificar la veracidad o falsedad de las siguientes conjeturas:

1. Una función $f(x)$ es par si y solo si la representación gráfica de la función $f(x)$ es simétrica respecto del eje Y.
2. Una función $f(x)$ es impar si y solo si la representación gráfica de la función $f(x)$ es simétrica respecto del origen.

2. Dada las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = (x - 2)^3$ y $h(x) = (x - 5)^3$:

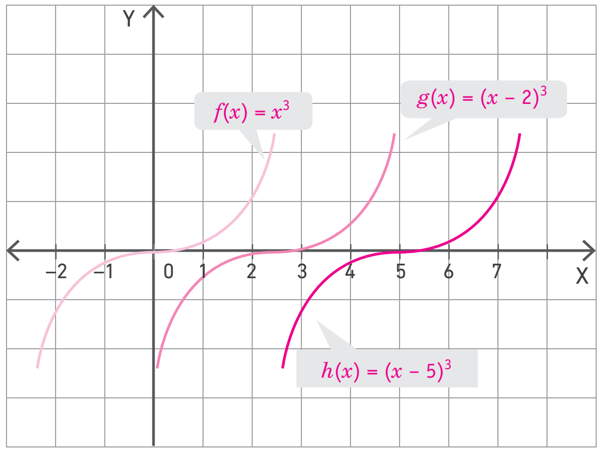
   a. Grafican $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ en el plano cartesiano.

   b. Responden qué tipo de transformación se visualiza al representar $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ en el plano cartesiano y argumentan su respuesta.

Finalmente, responden: ¿Es correcto afirmar que para las funciones $f(x) = x^5 + 1$, $g(x) = x^5 + 3$ y $h(x) = x^5 + 7$ se obtiene una traslación vertical? Argumentan su respuesta.

Observaciones a la o el docente

Para esta actividad, se sugiere que las y los estudiantes analicen las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$, utilizando un *software* geométrico con el propósito de visualizar el tipo de traslación. Por ejemplo:



» La representación gráfica de la función $f(x) = (x - h)^3$ se obtiene mediante una traslación horizontal de la función $f(x) = x^3$.

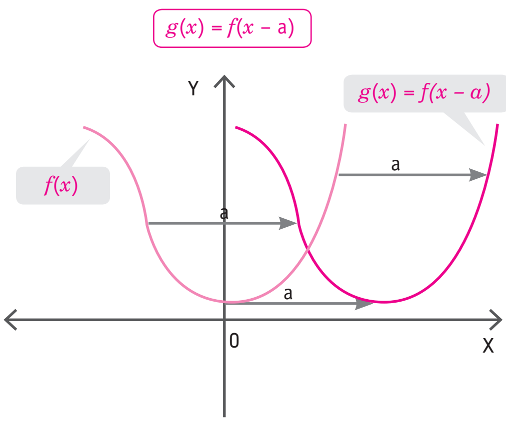
» La representación gráfica de la función $f(x) = x^3 + c$ se obtiene mediante una traslación vertical de la función $f(x) = x^3 + c$.

Los análisis anteriores corresponden a casos particulares. Se sugiere que la o el docente promueva, además, aprendizajes que impliquen la construcción y justificación de generalizaciones, tales como:

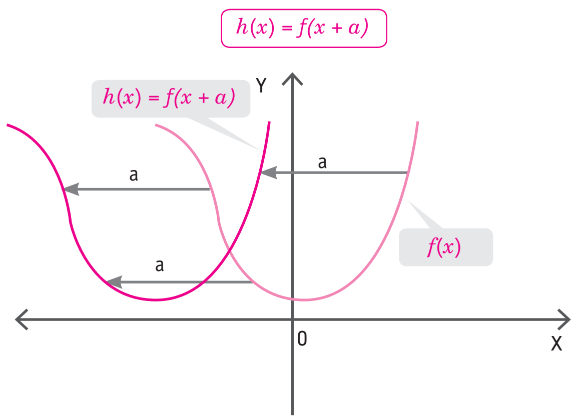
» Si $a > 0$ y $g(x) = f(x - a)$, la gráfica de la función $g(x)$ se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica $f(x)$ en a unidades hacia la derecha en el plano cartesiano.

» Si $a > 0$ y $g(x) = f(x + a)$, la gráfica de la función $g(x)$ se obtiene desplazando horizontalmente la gráfica $f(x)$ en a unidades hacia la izquierda en el plano cartesiano.

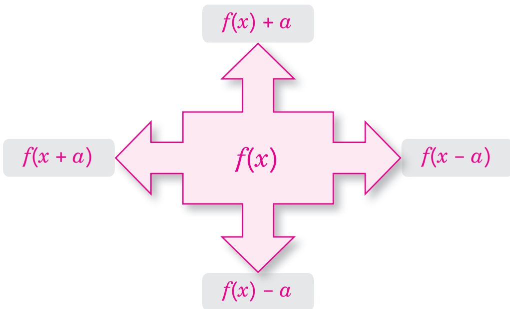
Si $a > 0$:

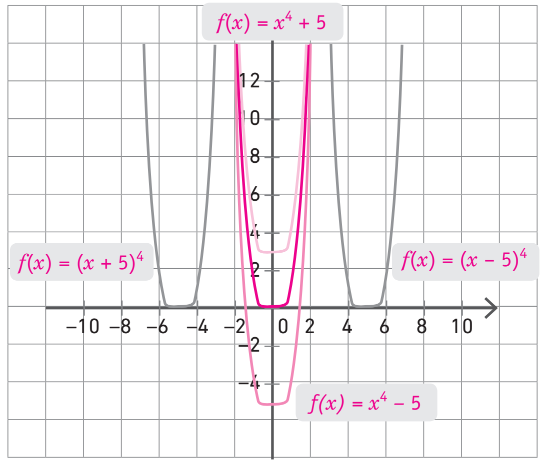


Si $a > 0$:



En síntesis, las posibles traslaciones de $f(x)$ cuando $a > 0$ son:





3. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

La alometría trata de cuantificar relaciones entre distintas medidas de un organismo, fundamentalmente, con la masa de este, basándose en ecuaciones del tipo $f(x) = k \cdot x^n$. Por ejemplo, para mamíferos uterinos se han desarrollado modelos que permiten relacionar variables como la tasa de consumo de oxígeno TCO (en mililitros por minuto), la frecuencia respiratoria FR (en ciclos por minuto) y la masa de los pulmones M_{pulm} (en kilogramos) con la masa M (en kilogramos) del animal. En la siguiente tabla se muestran las ecuaciones:

Tasa de consumo de oxígeno	$TCO = 11{,}6\ M^{0{,}76}$
Masa de los pulmones	$M_{pulm} = 0{,}0113\ M^{0{,}99}$
Frecuencia respiratoria	$FR = 53{,}5\ M^{-0{,}26}$

a. Analizan las representaciones gráficas correspondientes a la tasa de consumo de oxígeno, peso de los pulmones y frecuencia respiratoria.
b. Responden: ¿Qué significado tiene que el exponente de la función potencia tenga un valor menor que 0?
c. Indican si es correcto afirmar que la masa de los pulmones de un animal es aproximadamente el 9 % de la masa total.
d. Señalan si es correcto afirmar que para determinados valores de M la frecuencia respiratoria es constante.

4. Se les presenta la siguiente situación y realizan las actividades:

El rendimiento y del motor de un auto para enfrentar la resistencia del viento depende de la velocidad x con la cual el auto está andando. La potencia se expresa en kW según normas internacionales de medición.

a. Responden: ¿Cuál de las siguientes tablas pertenece a la función potencia de la forma $y = a \cdot x^z$ $(z \neq 1)$ que está modelando la situación? Argumentan su respuesta.

Velocidad x en km/h	0	30	60	90	120
Potencia y en kW	0	0,19	0,475	0,7125	0,95

Velocidad x en km/h	0	30	60	90	120
Potencia y en kW	0	0,4	1,2	2,0	2,8

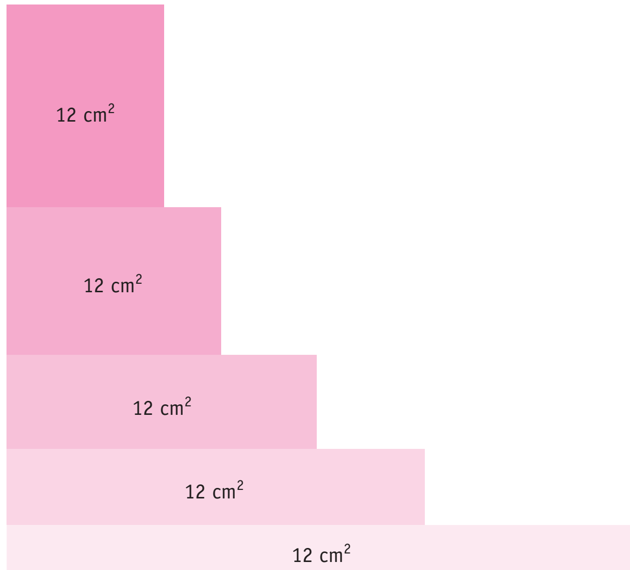
Velocidad x en km/h	0	30	60	90	120
Potencia y en kW	0	0,27	2,16	7,29	17,28

b. Desarrollan la ecuación en la forma requerida que representa la función del rendimiento y en dependencia de la velocidad x.

c. Construyen el gráfico de la función en un sistema cartesiano de coordenadas.

5. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

En la imagen a continuación, se presenta una secuencia de cinco rectángulos de 12 cm^2 de área cada uno. La variable x representa el largo del rectángulo, y la variable y, el ancho.



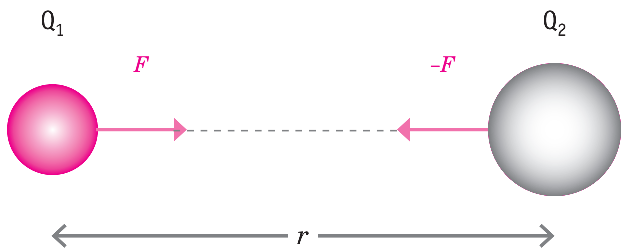
a. Basándose en la imagen, elaboran una tabla que muestre los valores posibles de los lados x e y de los rectángulos.

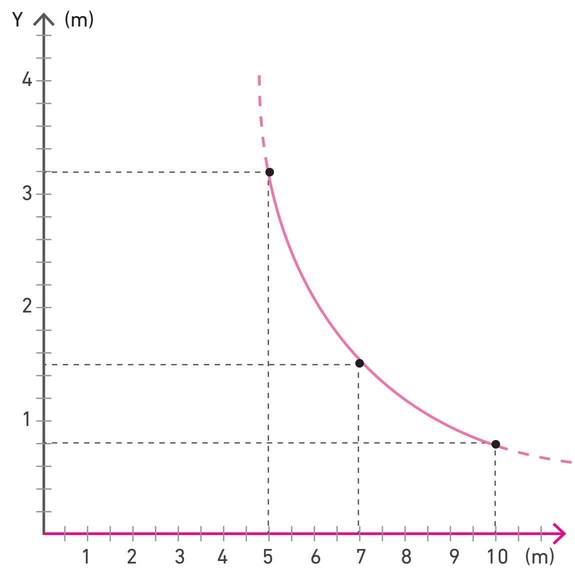
b. Dibujan el gráfico de la función uniendo los vértices superior derecho de cada rectángulo.

c. Determinan la ecuación de la curva que pasa por los vértices antes señalados, expresando la relación mediante una potencia de x.

6. Se les plantea la siguiente situación y realizan las actividades:

En el gráfico se representa el resultado de un experimento físico que consistió en medir la fuerza eléctrica de atracción F que actúa sobre dos cargas eléctricas de diferentes signos. En el sistema de coordenadas se representa la fuerza F en unidades de mili-Newton (mN), en dependencia de la distancia r en unidades de cm entre las cargas. La distancia entre ambas cargas al inicio de las mediciones es r_0 = 5 cm.





a. Describen la relación entre la fuerza F y la distancia r.

b. La fuerza F = 1,5 mN, que actúa en la distancia $\sqrt{2}\ r_0$, está aproximada, pues su valor exacto es 1,6 mN. Conjeturan acerca de la función potencia de la forma $F(r) = a \cdot x^z$.

c. Determinan el valor del parámetro a.

d. Desarrollan la ecuación que modela la fuerza eléctrica de atracción entre dos cargas.

e. Determinan las fuerzas que actúan en las distancias de r = 2,5 cm y de r = 15 cm.

AE 02

Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.

Observaciones a la o el docente

En el desarrollo de las actividades sugeridas para este Aprendizaje Esperado, se recomienda realizar un análisis que contemple la justificación de conjeturas. Por ejemplo:

1. Se les entrega la siguiente información y realizan lo solicitado:

La refrigeración industrial de los alimentos permite controlar la velocidad de ciertas actividades químicas y enzimáticas y el ritmo de crecimiento y metabolismo de ciertos microorganismos tóxicos. El cuadro siguiente muestra la relación entre la temperatura medida en grados Celsius y el crecimiento microbiano.

Grados C	Proceso
35	
25	
15	de crecimiento rápido
10	
5	
0	
–10	sin crecimiento
–15	
–25	muerte lenta

a. Exprese esta información utilizando desigualdades e intervalos. Complete la tabla.

Desigualdad	Intervalos	Proceso
$-30\,^{\circ}C \leq t < -15\,^{\circ}C$		

b. Formule y justifique conjeturas de lo que sucede para $t \geq 35\,^{\circ}C$ y para $t < -25\,^{\circ}C$.

c. Formule y justifique conjeturas de lo que sucede en el intervalo t = [0,5) grados Celsius.

2. El cuadro siguiente presenta criterios para clasificar empresas propuestos por Sercotec, el SII y la Corfo. Interpretan esta información de modo que permita, por ejemplo, redactar una nota que caracterice a la pequeña y mediana empresa, suponiendo que será incluida en una campaña publicitaria relativa a facilidades tributarias para este tipo de empresas.

	Instituciones y criterios propuestos		
	SERCOTEC	SII	CORFO
Criterios / Categorías	Número de personas ocupadas (x)	Volumen de venta UF (y)	Nivel de inversión UF
Microempresa	$1 \leq x \leq 4$	$y \leq 2\,400$	No superior a 2 000
Pequeña	$5 \leq x \leq 49$	$2\,401 \leq y \leq 25\,000$	No superior a 15 000
Mediana	$50 \leq x \leq 199$	$25\,001 \leq y \leq 100\,000$	No superior a 45 000
Grande	$200 \leq x$	$100\,001 \leq y$	Superior a 45 000

1. Solucionan el siguiente problema:

Una camioneta pesa 1 950 kg. La diferencia entre el peso de la camioneta vacía y el peso de la carga que lleve no debe ser inferior a 1 135 kg. Si hay que cargar cuatro cajas de igual tamaño y peso, ¿cuánto puede pesar, como máximo, cada una de las cajas para poder llevarlas en la camioneta? Represente la solución como conjunto, como intervalo y gráficamente en una línea recta.

2. Solucionan el siguiente problema:

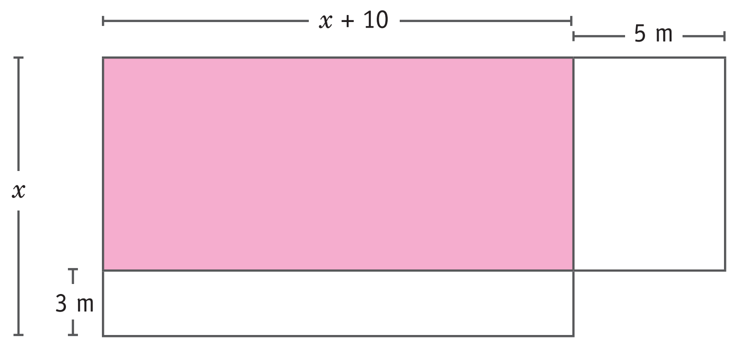
Natalia quiere ir al cine con sus amigas y juntaron $ 22 000. Al llegar a la boletaría, se da cuenta de que si compra entradas 2D a $ 3 000 le sobrará dinero, y si compra entradas 3D a $ 3 500, en oferta, le faltará dinero. ¿Cuántas amigas van con Natalia? Represente la solución como conjunto, como intervalo y gráficamente en una línea recta.

3. Solucionan el siguiente problema:

En un oficina de correos están preparando los turnos para salir de vacaciones. El jefe de personal concluye que, si la cuarta parte del personal toma vacaciones, quedarían menos de 18 personas trabajando, y si la tercera parte sale de vacaciones, quedarían más de 14 personas. ¿Cuántas personas trabajan en la oficina de correos? Represente la solución como conjunto, como intervalo y gráficamente en una línea recta.

4. Solucionan el siguiente problema:

Desde el Municipio le explican a la señora Adelina, propietaria de un terreno rectangular, que para la construcción y ampliación de veredas, de acuerdo al plano regulador del sector, su terreno disminuiría en una franja de 3 metros en el frente de su casa. Este terreno se podría compensar con una franja de 5 metros de ancho del terreno colindante al de su casa, que es un terreno municipal. ¿Cuáles son las medidas mínimas del terreno, suponiendo que el largo mide 10 metros más que el ancho, para que esta decisión favorezca a la señora Adelina?

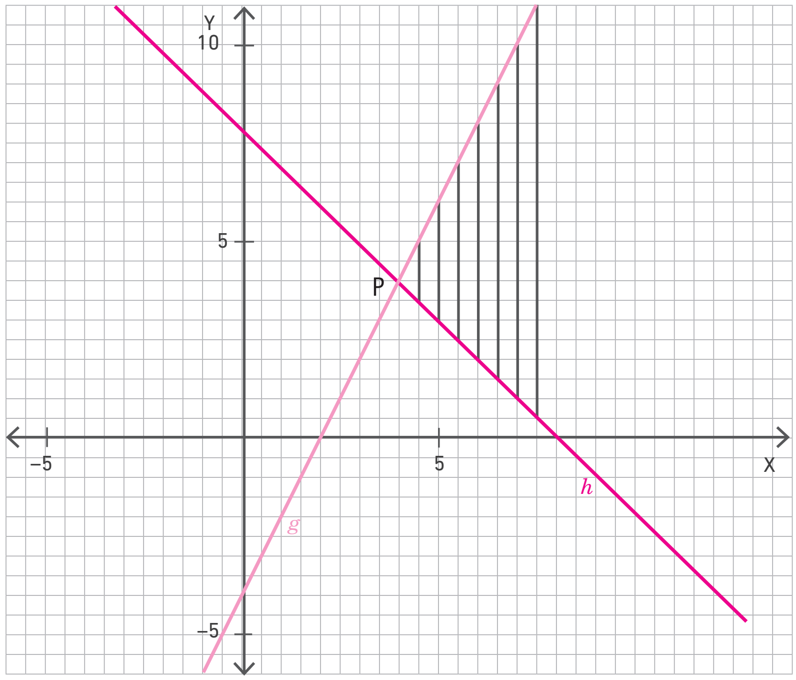


Observaciones a la o el docente

Para esta actividad, inicialmente se puede considerar el caso particular en que el terreno mide 20 m de ancho por 30 m de largo, para constatar que el cambio propuesto sería desfavorable para la dueña. Resolviendo el problema con los datos del recuadro y la variable x, resulta la inecuación $x > 22{,}5$, que significa que, para un ancho mayor a 22,5 m, el cambio sería favorable para la dueña. Con el objetivo de obtener una segunda inecuación del tipo $x < a$, se puede modificar el enunciado original diciendo que la franja adicional tiene un ancho de 4 m. Se debe preguntar hasta qué valor de x el cambio sería desfavorable. En este último caso resulta la inecuación $x < 42$.

Posteriormente, la o el docente puede modificar aún más las condiciones del problema para desafiar a las y los estudiantes a resolver otros problemas. La o el docente puede complejizar el problema planteando preguntas como las siguientes: Si inicialmente el ancho del terreno hubiera sido el doble del largo, ¿sería favorable para la señora Adelina el cambio realizado por la Municipalidad?, ¿y si el terreno hubiese sido cuadrado?, ¿y si el terreno hubiese quedado cuadrado después de las modificaciones?

5. En el siguiente plano cartesiano, las rectas g y h se intersectan en el punto P(4,4).



a. Determinan las ecuaciones de las rectas g y h y verifican que P es el punto de intersección.

b. Elaboran el sistema de inecuaciones lineales que representa el área entre las rectas g y h rayada en azul. Representan el sistema de inecuaciones lineales:

[1] $a_1x + b_1y \leq c_1$

[2] $a_2x + b_2y \geq c_2$

c. Se les plantea que las rectas g y h representan el cambio constante de dos magnitudes y, considerando el recorrido del tiempo x; por ejemplo, a las 12:00 horas el tren 1 viaja, a una velocidad constante de 2 km/min, desde la estación A hacia el puesto de control ubicado en (0,0). A la misma hora, el tren 2 viaja desde la estación C hacia el puesto de control a una velocidad constante de 1 km/min. La estación A se encuentra a 8 km del puesto de control y la estación C está a 4 km del puesto de control. Además, ambos trenes viajan en carriles paralelos representados por el eje Y en direcciones opuestas y, mientras avanzan, se van acercando el uno al otro.

- Verifican que las coordenadas del punto P representan el instante y el lugar del encuentro entre ambos trenes.
- Responden: ¿Qué representa el par ordenado (4,4)?

› Interpretar en función del contexto del problema

› Contestan: ¿Qué magnitud representan los segmentos dibujados en azul entre las rectas g y h?

› Analizan y responden qué significado tiene, en función del contexto del problema, cada punto en el área achurada entre las rectas g y h.

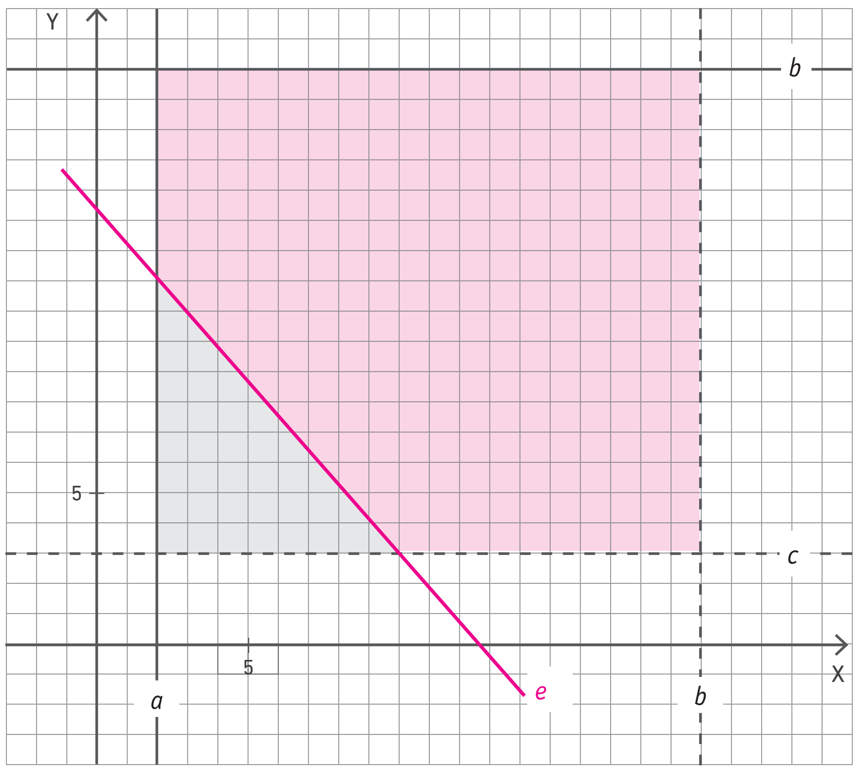
6. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

El área en damasco presentada en el sistema de coordenadas está delimitada por las cinco rectas a, b, c, d y e. Se usa línea punteada para indicar que esos puntos no pertenecen al área que delimitan; la línea sólida indica que sí pertenecen a dicha área.

a. Determinan las ecuaciones de las rectas a, b, c, d y e.

b. Elaboran el sistema de inecuaciones lineales que representa el área en damasco.

c. Verifican algebraicamente si los puntos A(5,6) y B(20,11) son soluciones del sistema de inecuaciones lineales planteado anteriormente.



Observaciones a la o el docente

El gráfico de la actividad 7 sobre costo de energía (eje Y) versus cantidad de artículos producidos (eje X) describe, para ambas máquinas, una disminución en el costo de energía si se aumenta la producción. Ambas funciones, que describen el rendimiento de las máquinas, son funciones afines decrecientes. La recta paralela negra al eje X representa el tope de gastos de energía en la producción (400 unidades de energía con la ecuación es $y = 400$). Las rectas paralelas negras al eje Y representan el mínimo de artículos producidos (2 000) y el máximo de artículos producidos (5 000). Las ecuaciones son $x = 2\,000$ y $x = 5\,000$.

La o el docente puede realizar un análisis gráfico de cada ecuación de la recta, lo que puede facilitar, a las y los estudiantes, inferir que una función creciente implica justificar que si $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, y que una función decreciente implica justificar que si $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Esto permitirá interpretar las soluciones del sistema de ecuación lineal en función del contexto del problema; por ejemplo, en el enunciado de la actividad 7, las ecuaciones de la recta son funciones decrecientes, por ende, a menor cantidad de artículos producidos, mayor es el gasto de energía para cada artículo.

Para promover diferentes niveles de desempeño, la o el docente puede construir junto con los y las estudiantes las argumentaciones para determinar si la función lineal es creciente o decreciente. Por ejemplo:

Sea una función f: A $\rightarrow$ B, $f(x) = mx + n$

$$\begin{array}{lrl} \text{Si} & x_1 > x_2 & \text{/ multiplicaremos por } m > 0 \\ & mx_1 > mx_2 & \text{/ sumaremos } n \text{ a la igualdad, con } n \in \mathbb{R} \\ & mx_1 + n > mx_2 + n & \\ & f(x_1) > f(x_2) & \end{array}$$

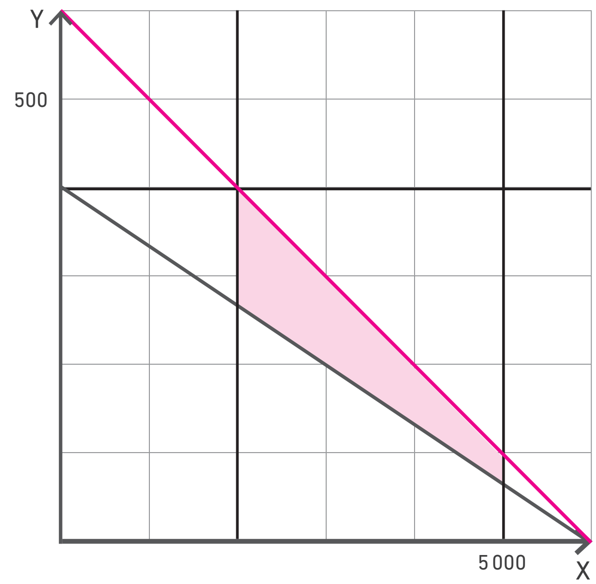
Por lo tanto, una función lineal es creciente cuando $m > 0$, es decir, cuando la representación gráfica de la función en el plano cartesiano implica una línea recta con pendiente positiva.

$$\begin{array}{lrl} \text{Si} & x_1 < x_2 & \text{/ multiplicaremos por } m < 0 \\ & mx_1 > mx_2 & \text{/ sumaremos } n \text{ a la igualdad, con } n \in \mathbb{R} \\ & mx_1 + n > mx_2 + n & \\ & f(x_1) > f(x_2) & \end{array}$$

Por lo tanto, una función lineal es decreciente cuando $m < 0$, es decir, cuando la representación gráfica de la función en el plano cartesiano implica una línea recta con pendiente negativa.

7. Se les presenta la siguiente situación, responden las preguntas y realizan las actividades:

En el sistema de coordenadas a continuación, la variable x representa la cantidad de artículos producidos, y la variable y, los gastos de energía en la fabricación para cada artículo. En la producción se puede trabajar con dos máquinas: la primera está representada por la recta en color rojo, y la segunda, por la recta azul.



a. ¿Qué tipo de función representan las rectas de color rojo y de color azul?
b. Justifican si las funciones son crecientes o decrecientes, e interpretan la respuesta según el contexto del problema.
c. Determinan la ecuación de la recta de color rojo y de color azul.
d. ¿Cómo se desarrolla la diferencia del gasto de energía entre ambas máquinas?
e. Determinan las ecuaciones de las tres rectas marcadas en negro que son paralelas a los ejes del sistema de coordenadas X e Y.
f. Describen, mediante un sistema de inecuaciones lineales, el área en verde entre la recta en rojo, la recta en azul y los límites determinados por las paralelas negras al eje Y.
g. Si la producción es de 3 000 unidades, ¿cuál es la diferencia aproximada en el gasto de energía entre ambas máquinas?

AE 03 Determinar la función inversa de una función dada.

1. Argumentan la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   a. Si f es una función afín con $f(x) = mx + c$, f es siempre inyectiva.

   b. Dada las funciones $f(x) = mx + n$ y $g(x) = \dfrac{(x-n)}{m}$ con $m \neq 0$, el resultado de la composición de funciones $f \circ g(x)$ y $g \circ f(x)$ es siempre la función identidad $(h(x) = x)$.

Observaciones a la o el docente

En una primera etapa, se sugiere que las y los estudiantes justifiquen la veracidad de las afirmaciones recurriendo a casos particulares. Posteriormente, se puede promover aprendizajes que impliquen demostrar generalizaciones. Dependiendo del nivel alcanzado por sus estudiantes, se puede desarrollar demostraciones formales, manteniendo el principio de que estas deben ser significativas y comprensibles para las alumnas y los alumnos. A continuación se incluyen ejemplos de demostraciones que pueden ser construidas conjuntamente con el curso:

Un primer ejemplo es: Sea f una función afín $f(x) = mx + c$, f es siempre inyectiva.

$f(x_1) = mx_1 + n$ y $f(x_2) = mx_2 + n \;/\; m \neq 0$

Si $\quad f(x_1) = f(x_2)$

$$mx_1 + n = mx_2 + n \qquad / -n$$

$$mx_1 = mx_2 \qquad / \frac{1}{m}$$

$$x_1 = x_2$$

La o el docente puede promover el análisis para $g(x) = ax_2 + bx + c$, y justificar si cumple o no que $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Un segundo ejemplo es: Dada las funciones $f(x) = mx + n$ y $g(x) = \dfrac{(x-n)}{m}$ con $m \neq 0$, de la composición de funciones resulta siempre la función identidad $(h(x) = x)$.

Se recomienda construir con las y los estudiantes la siguiente argumentación:

Sea $f(x) = mx + n$ y la función $g(x) = \dfrac{x - n}{m}$

$$g(x) = \frac{x - n}{m}$$

$$g \circ f(x) = g\,(f(x))$$

$$g \circ f(x) = \frac{(mx + n) - n}{m}$$

$$g \circ f(x) = \frac{mx + n - n}{m}$$

$$g \circ f(x) = \frac{mx + 0}{m}$$

$$g \circ f(x) = \frac{mx}{m}$$

$g \circ f(x) = x$, para $x \in$ A

La o el docente puede profundizar en este contenido explicando que la composición de funciones es "no conmutativa" y "asociativa". Se sugiere comenzar demostrando con funciones tales como $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = -\dfrac{x}{2} - 5$.

» $f \circ g(x) = 2\left(-\dfrac{x}{2} - 5\right) + 3$

$f \circ g(x) = -x - 10 + 3$

$f \circ g(x) = -x - 7$

» $g \circ f(x) = -\dfrac{(2x + 3)}{2} - 5$

$g \circ f(x) = \dfrac{-2x - 3}{2} - 5$

$g \circ f(x) = -x - \dfrac{3}{2} - 5$

$g \circ f(x) = -x - \dfrac{13}{2}$

Por lo tanto, $f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$, excepto que $f \circ g(x) = x = g \circ f(x)$, es decir, $f(x)$ es la función inversa de $g(x)$ o viceversa.

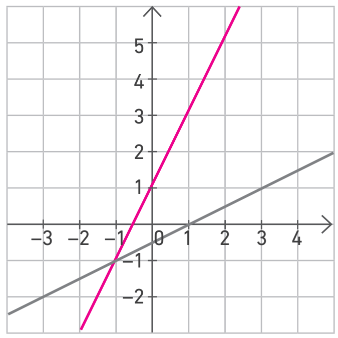
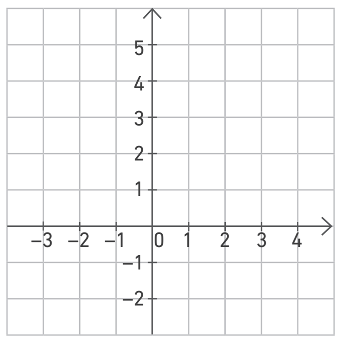
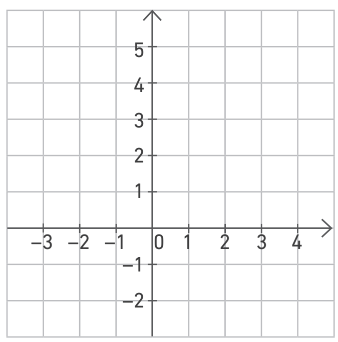
También se podría analizar el caso $f(x) = x^2$ con $x \geq 0$ y $g(x) = \sqrt{x}$ (con $x \geq 0$)

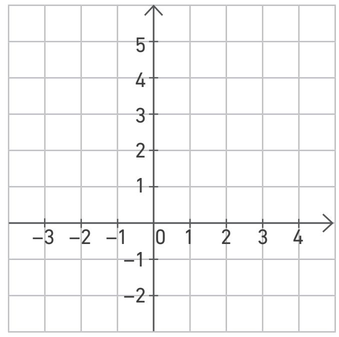
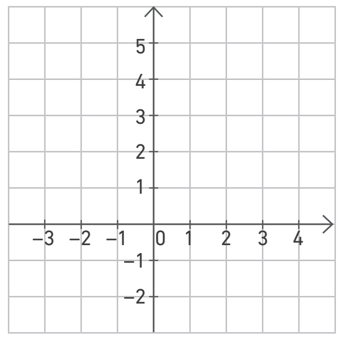
$$g[f(x)] = \sqrt{x^2} = x$$

$$f[g(x)] = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

2. Desarrollan, a partir de la ecuación de una función f dada, la ecuación de la correspondiente relación inversa f^{-1} y elaboran los gráficos respectivos.

a. Completan la tabla.

Ecuación de la función f	Ecuación de la relación inversa f^{-1}	Despejar la ecuación de la relación inversa f^{-1} a y	Gráfico de las funciones f y la relación inversa
Ejemplo: $y = 2x + 1$	$x = 2y + 1$	$x = 2y + 1$ $x - 1 = 2y$ $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ $f(x)^{-1} = \frac{(x-1)}{2}$	
$y = \frac{1}{2}x - 3$			
$y = -x^2$			

Ecuación de la función f	Ecuación de la relación inversa f^{-1}	Despejar la ecuación de la relación inversa f^{-1} a y	Gráfico de las funciones f y la relación inversa
$y = x^2$ $(x \in \mathbb{R}_0^+)$			
$y = 2^x$			

b. A partir de la tabla anterior, formulan y verifican conjeturas sobre qué transformación geométrica se obtiene de la relación inversa f^{-1}.

c. Basándose en las conclusiones obtenidas en la actividad b, formulan y verifican conjeturas acerca de la repetición del proceso de inversión aplicado iterativamente a una función y sus relaciones inversas resultantes. Además, responden las siguientes interrogantes:

› ¿Qué relación resulta si se aplica a una función un número par de procesos de inversión?

› ¿Qué relación resulta si se aplica a una función un número impar de procesos de inversión?

Observaciones a la o el docente

Esta actividad permite recordar las condiciones para la existencia de la función inversa de una función dada. Por ejemplo, los y las estudiantes pueden analizar gráficamente la función $f(x) = x^2$ e inferir que, sin la restricción de dominio $x \in \mathbb{R}_0^+$, da origen a una relación que no es función, es decir, $f(x)^{-1}$ no es función, ya que al trazar la gráfica de la relación inversa se visualiza una simetría respecto al eje X. Lo anterior se comprueba al trazar una recta paralela al eje Y que intersecta a la gráfica en dos puntos.

Por otra parte, los y las estudiantes pueden verificar que cualquier función par tiene relaciones inversas que no son funciones.

3. Se les presenta la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

Un tren del Metro inicia su desplazamiento, que puede ser representado aproximadamente por la ecuación cuadrática $y = 0{,}5x^2$, en la cual la variable x representa el tiempo en segundos, y la variable y, el recorrido.

a. Completan la tabla de valores funcionales.

Tiempo $x[s]$	0	1	2	3	4	5	6
Recorrido $y[m]$							

b. Elaboran el gráfico de f con la ecuación $y = 0{,}5\ x^2$. Elijen adecuadamente las unidades en los ejes.

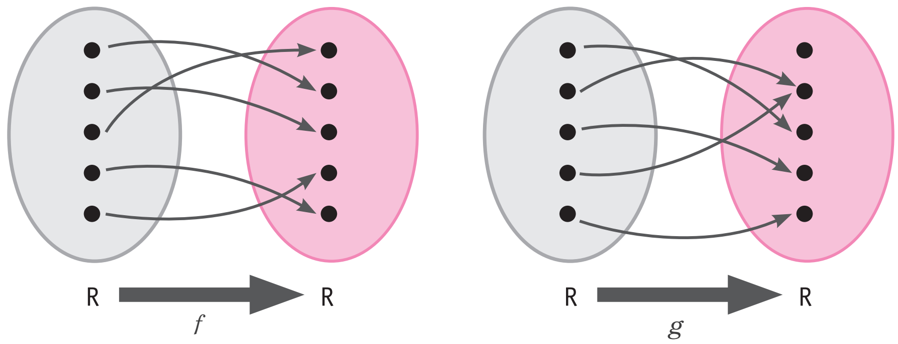
c. Elaboran el gráfico de la relación inversa f^{-1}.

d. Responden: ¿Qué cantidad física representa la variable independiente de la relación inversa?

e. Determinan la ecuación de la relación inversa f^{-1}.

4. Para f, g, h, k, z y w, determinan las ecuaciones de las relaciones inversas f^{-1}, g^{-1}, h^{-1}, k^{-1}, z^{-1} y w^{-1} según corresponda. Argumentan la respuesta.

Las funciones f y g representadas por diagramas de Venn.



Sea h: $y = x^2$ con el dominio $D_f = \mathbb{R}_0^+$.
Sea k: $y = x^2$ con el dominio $D_f = \mathbb{R}$.
Sea z: $y = \sqrt{x}$ con el dominio $D_f = \mathbb{R}_0^+$.
Sea w: $y = 10^x$ con el dominio $D_f = \mathbb{R}$.

Además, justifican si la función f y g son inyectivas y si las funciones h, k, z y w son funciones crecientes o decrecientes.

5. Elaboran el gráfico de la función potencia $f : y = x^{-2}$. Llevan a cabo lo siguiente:

a. Demuestran que la función f no es una función inyectiva.
b. Delimitan el dominio para que la relación inversa sea función.
c. Desarrollan, bajo las condiciones del ejercicio a, la ecuación de la función inversa.
d. Argumentan si la función f es una función creciente y/o decreciente según las condiciones dadas en a.

EJEMPLO DE EVALUACIÓN

APRENDIZAJE ESPERADO	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
AE 02 Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.	› Elaboran las inecuaciones lineales que modelan el fenómeno involucrado en el problema. › Representan una resolución gráfica del conjunto solución del problema. › Comprueban en forma gráfica y algebraica si un par (x,y) pertenece o no al conjunto solución del problema.

ACTIVIDAD PROPUESTA

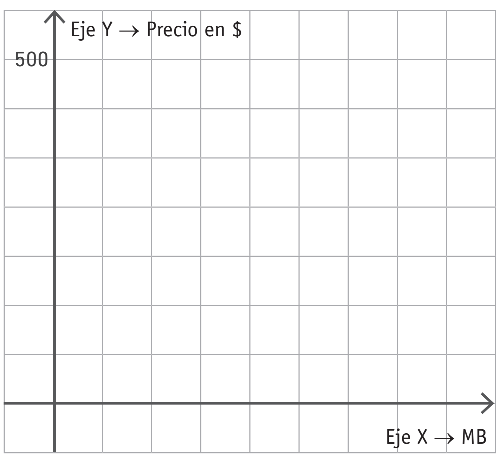
Lea el siguiente problema y lleve a cabo lo solicitado:

Dos empresas telefónicas ofrecen acceso a internet para celulares. Los cobros del servicio tienen dos componentes: cargo fijo para 1 GB (1 000 MB) y cobro por cada MB adicional. Las condiciones son las siguientes: la empresa A ofrece un plan con un cargo fijo de \$20 000 más \$20 por MB, y la empresa B dispone de un plan con un cargo fijo de \$18 000 más \$30 por MB. ¿Hasta cuántas horas de conexión a internet el servicio de la empresa B es más económico que el servicio de la empresa A?

a. Elabore un sistema de inecuaciones lineales que resuelva el problema.

b. Represente la resolución gráfica del problema en un sistema cartesiano de coordenadas.

c. Se sabe que los clientes de la empresa C pagan \$28 300 por 350 MB adicionales, y los clientes de la empresa D pagan \$30 000 por 300 MB adicionales. Determine, mediante el gráfico del sistema de inecuaciones, si para los clientes de C y D las condiciones son más favorables o no.



d. Resuelva simbólicamente el sistema de inecuaciones lineales planteado en c.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al evaluar, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

› Elabora las ecuaciones de las funciones.

› Elige, en los ejes del sistema cartesiano de coordenadas, las unidades de precio y megabyte.

› Grafica correctamente las rectas y marca los semiplanos que corresponden a las inecuaciones.

› Determina las coordenadas del punto de intersección de ambas rectas.

› Marca los puntos que representan los datos de los clientes de las empresas C y D.

› Resuelve el problema de la actividad c mediante la ubicación de los puntos en el plano.

› Resuelve el sistema 2x2 de inecuaciones mediante un método favorable.

UNIDAD 2
GEOMETRÍA

PROPÓSITO

En esta unidad, se busca que los y las estudiantes representen objetos en el espacio utilizando como referente el sistema tridimensional de coordenadas. Se pretende que amplíen y profundicen el conocimiento de otros años con respecto a describir rectas por medio de ecuaciones vectoriales y cartesianas: antes lo hacían en dos dimensiones y en esta unidad se espera que lo hagan en tres. Además, se introduce el concepto de plano vectorial y de cuerpos geométricos generados por traslación y rotación.

Asimismo, se pretende que las y los estudiantes determinen áreas y volúmenes de cuerpos geométricos sencillos, los cuales han sido generados por traslación o rotación de figuras 2D en el espacio.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Geometría cartesiana, homotecia, vector, producto de un vector por un escalar, sistemas lineales 2x2.

CONCEPTOS CLAVE

Función cuadrática, cambio cuadrático, solución real, solución compleja.

CONTENIDOS

› Puntos en el espacio.
› Ecuación vectorial de la recta en el espacio.
› Ecuación cartesiana de la recta en el espacio.
› Ecuación vectorial del plano en el espacio.
› Generación de cuerpos por traslación de figuras 2D en el espacio.
› Generación de cuerpos por rotación de figuras 2D en el espacio.

HABILIDADES

- Representar puntos, rectas y planos en el sistema de coordenadas tridimensional.
- Establecer la ecuación vectorial del plano que pasa por tres puntos.
- Identificar un vector de traslación.
- Determinar volúmenes de figuras 3D generadas por rotación o traslación.

ACTITUDES

- Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.

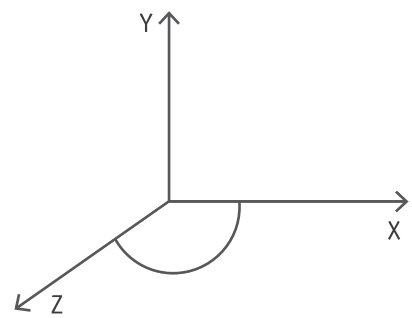
APRENDIZAJES ESPERADOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Las y los estudiantes que han logrado este aprendizaje:*
AE 04 Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas.	› Construyen una representación del cubo unitario. › Elaboran representaciones de otros cubos, prismas y pirámides en un sistema 3D de coordenadas. › Dibujan vectores $\overrightarrow{AB}$ entre dos puntos A y B, y determinan sus componentes según los ejes de coordenadas. › Determinan las coordenadas de un punto P' que resulta si se traslada el punto P mediante un vector $\vec{a}$.
AE 05 Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas.	› Determinan la ecuación vectorial de una recta que pasa por dos puntos en el espacio. › Transforman la ecuación vectorial de una recta del espacio en la forma cartesiana y viceversa. › Elaboran la ecuación vectorial de un plano en el espacio.
AE 06 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio.	› Dibujan y describen los cuerpos generados si se trasladan figuras 2D del plano X/Y en dirección del eje Z a un plano paralelo. › Identifican en cuerpos geométricos dados la figura 2D trasladada y el vector de traslación correspondiente. › Determinan el volumen y el área de la superficie de algunos cuerpos generados por traslación.
AE 07 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.	› Realizan y describen rotaciones axiales concretas de modelos de rectángulos, triángulos y círculos. › Elaboran en un sistema 3D representaciones gráficas de cuerpos generados por rotación. › Determinan el volumen y el área de superficie de algunos cuerpos generados por rotación de rectángulos y triángulos.

OFT	APRENDIZAJES ESPERADOS EN RELACIÓN CON LOS OFT
› Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.	

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA UNIDAD

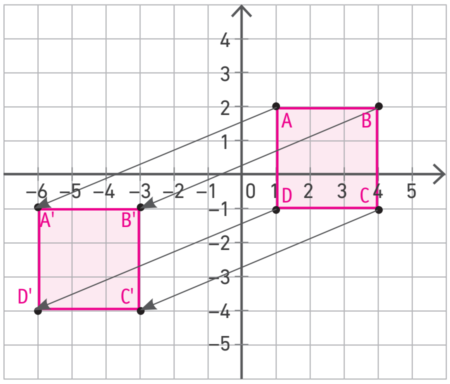
Para trabajar la construcción del sistema cartesiano 3D de coordenadas, se sugiere comenzar completando y analizando las características de las coordenadas de los puntos pertenecientes al plano Y/Z y X/Z, los cuales se construyen a partir de un eje perpendicular al plano cartesiano X/Y. Para lograr un efecto 3D, se debe dibujar un ángulo de 135° entre el eje X y el eje Z. Al mismo tiempo, se recomienda a la o el docente desafiar a los y las estudiantes a construir, utilizando diferentes estrategias, las representaciones gráficas de cuerpos en el sistema cartesiano 3D, y así fomentar la capacidad espacial. Además, es importante que las y los estudiantes trabajen problemas que les permitan desarrollar la percepción, representación, construcción y descripción disciplinar de los diferentes cuerpos.

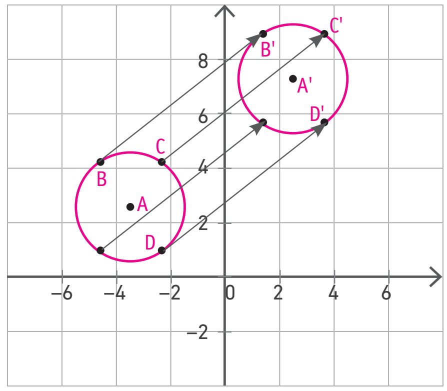


En relación con la ecuación vectorial de la recta, es fundamental que el o la docente analice, junto con el curso, la relación entre el vector asociado y el vector director al construir una ecuación vectorial de la recta, para guiar a las y los estudiantes a inferir e interpretar la representación geométrica y algebraica de la ecuación vectorial de la recta en el plano cartesiano 3D de coordenadas. Cabe recordar que la ecuación vectorial de una recta considera dos puntos en el espacio y los vectores asociados a dichos puntos.

Respecto de la unidad de área y volúmenes de cuerpos generados por traslación y rotación, se recomienda realizar transformaciones isométricas de triángulos, cuadrados, circunferencias y rectángulos, de tal manera que sea posible visualizar la transformación isométrica de figuras geométricas en el plano cartesiano 2D de coordenadas. Se sugiere que, posteriormente, las y los estudiantes formulen y verifiquen conjeturas acerca del cambio que se produce al modificar la dirección de la traslación o variar el eje de rotación al generar un cuerpo 3D.

Transformaciones isométricas en el plano cartesiano 2D de coordenadas





Para desarrollar progresivamente el razonamiento matemático en esta unidad, se deben promover diálogos que permitan la formulación y justificación de conjeturas, y verificar generalizaciones por medio de *software* tales como GeoGebra. Las y los estudiantes deben vislumbrar más allá de lo que visualizan geométricamente, inferir regularidades y plantear conjeturas, ya que “hacer matemática” implica descubrir lo implícito en una representación, fórmula o un problema, y la conjetura es el principal camino para dicho descubrimiento y/o razonamiento. Esto les permitirá anticipar posibles soluciones del problema, relacionar conocimientos algebraicos y/o geométricos y construir argumentos disciplinares al verificar las conjeturas y generalizaciones utilizando tecnología.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

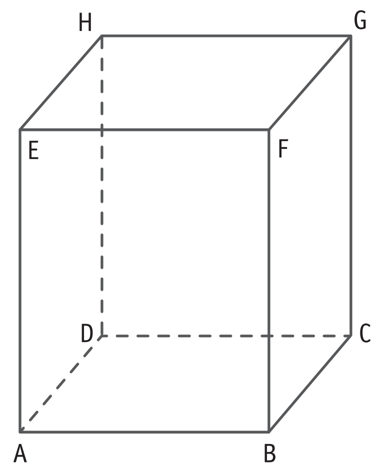
Las sugerencias de actividades presentadas a continuación pueden ser seleccionadas, adaptadas y/o complementadas por la o el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 04	Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas.

1. Se les plantea el siguiente problema, responden las preguntas y realizan las actividades:

   El dibujo muestra un cubo unitario. El origen del sistema tridimensional de coordenadas tiene el vértice D como origen.

A	
B	
C	
D	0, 0, 0 Origen
E	
F	
G	
H	



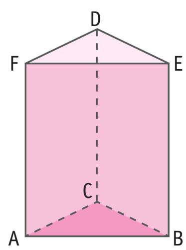
   a. Dado que el origen es el punto D(0,0,0), ¿cuál es el signo de las coordenadas de los vértices?
   b. Determinan las coordenadas de los vértices del cubo.
   c. ¿Qué tienen las coordenadas de D,H,E y A en común?
   d. ¿Cuáles son los vértices que tiene la coordenada $y = 0$?
   e. ¿Qué tienen en común los vértices de la cara D,C,G y H?
   f. Conjeturan acerca de las características de las coordenadas de todos los puntos de una cara.
   g. Verifican las conjeturas anteriores con el uso de un *software*.

Observaciones a la o el docente

En la actividad 2 se menciona el origen del sistema tridimensional de coordenadas que coincide con uno de los vértices del cuerpo representado. En cuanto a las coordenadas de los demás vértices, se entrega información sobre el largo de los segmentos para que los y las estudiantes puedan determinar las coordenadas. En el caso 1, que corresponde a un prisma triangular, se indica el largo de la altura, la cual es el doble de los catetos del triángulo rectángulo isósceles ABC. Por lo tanto, el o la docente debe orientar a los y las estudiantes a comprender que este problema tiene más de una solución. Es necesario intencionar un análisis similar en el caso 2, puesto que para el prisma cuadrangular se da la razón de los segmentos $\overline{AB} : \overline{AD} : \overline{AH} = 1 : 3 : 5$. Para promover diferentes niveles de desempeño por parte de las y los estudiantes, el enunciado del problema del prisma de base cuadrangular solamente da a conocer las coordenadas del vértice A.

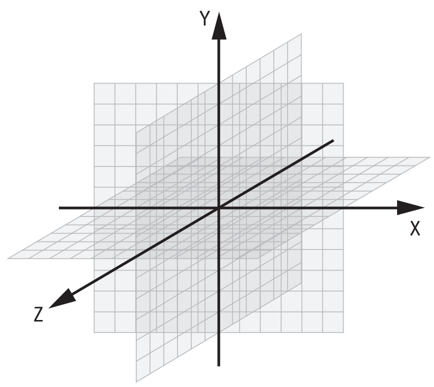
2. Elaboran representaciones de los siguientes prismas en un sistema tridimensional:

Caso 1



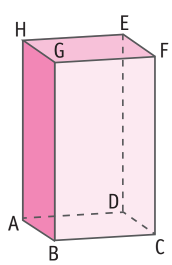
Prisma triangular

La altura del prisma es el doble de los catetos del triángulo rectángulo isósceles ABC.



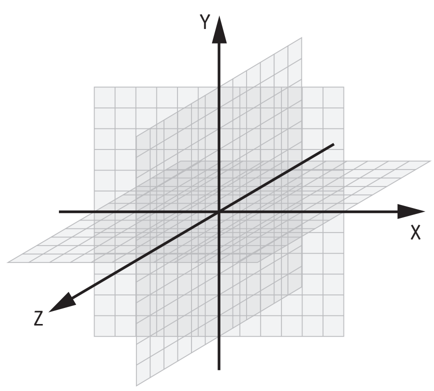
A	
B	
C	(0, 0, 0)
D	
E	
F	

Caso 2



Prisma cuadrangular

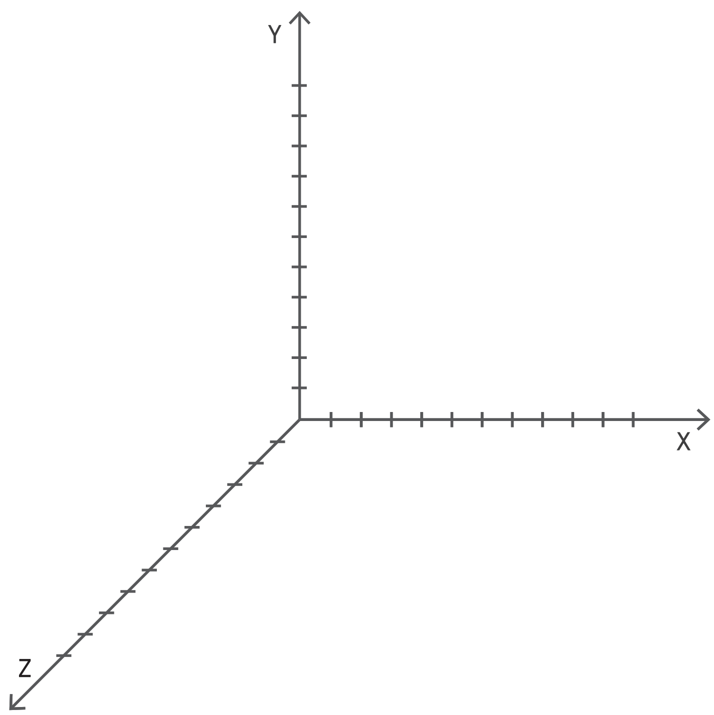
Las razones entre los segmanetos son $\overline{AC} : \overline{AD} : \overline{AH} = 1 : 3 : 5$



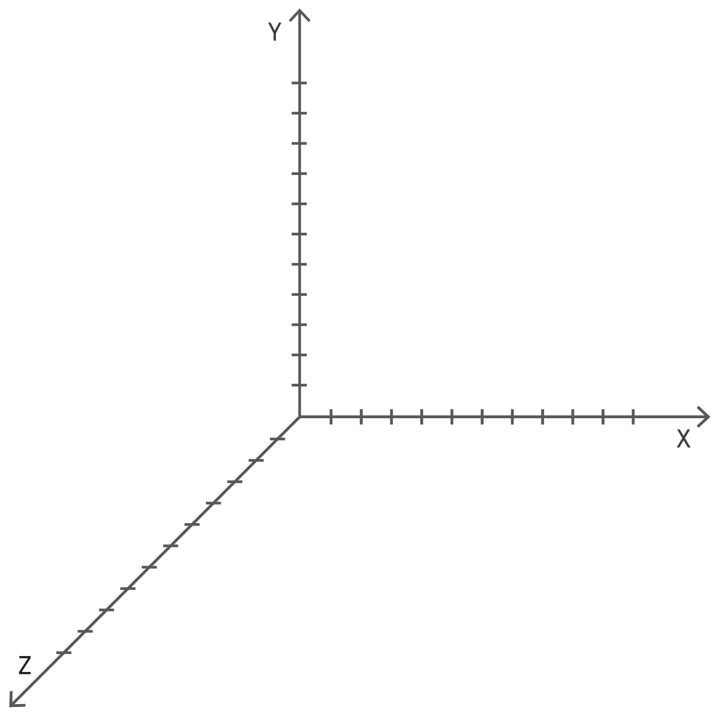
A	(1, 0, 0)
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	

3. Dado los puntos A(2,0,2) y B(4,5,8):

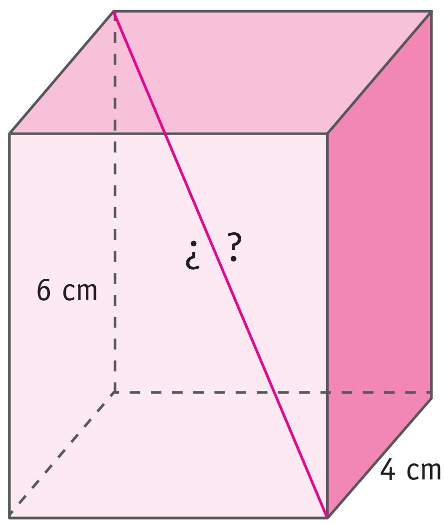
a. Dibujan el vector $\overrightarrow{AB}$ en el sistema tridimensional de coordenadas.
b. Consideran otros dos puntos C y D a libre elección y dibujan el vector correspondiente.
c. Suman $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y representan el resultado en el plano tridimensional.
d. Formulan conjeturas respecto de $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ y verifican representando el resultado en el plano tridimensional.
e. Responden: ¿En qué cuadrante estaría el vector $\overrightarrow{AB}$ si la coordenada X cambia de signo?, ¿y si cambia de signo solamente la coordenada Z? Argumentan su respuesta graficando los vectores en el plano tridimensional.



4. Determinan las coordenadas al trasladar el punto P(1,2,0) por el vector $\vec{v}$ = (0,3,5) y dibujan la transformación en el sistema tridimensional de coordenadas 3D.



5. Observan la siguiente imagen que muestra un prisma de base cuadrada:

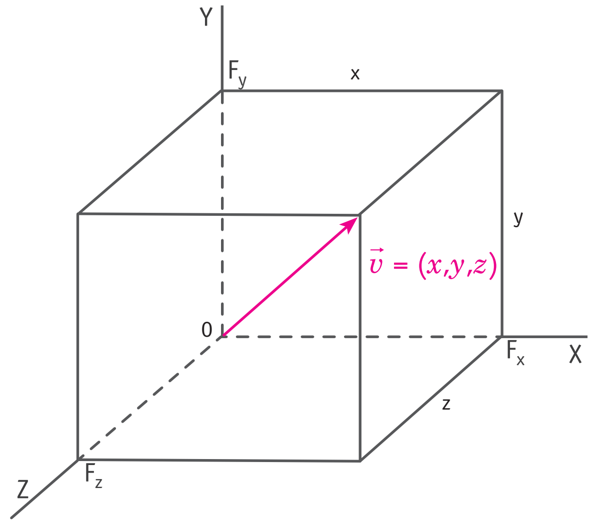


a. Responden: ¿Cuál es el valor de la diagonal?

b. Demuestran que la distancia entre dos puntos A = (a_1,a_2,a_3) y B = (b_1,b_2,b_3), en el plano 3D, se calcula mediante la fórmula: $d_{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

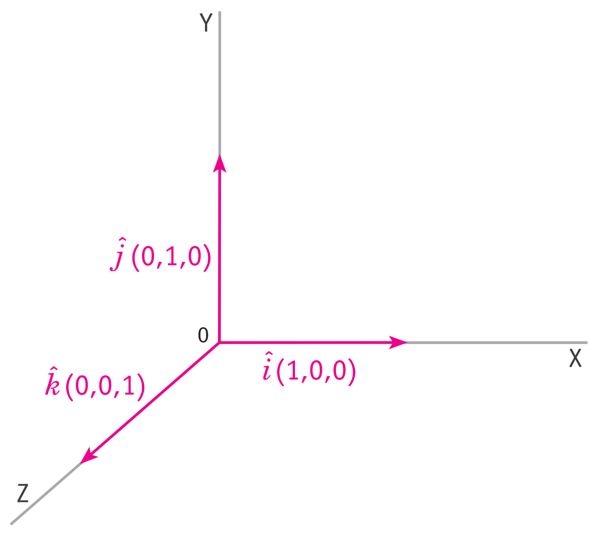
Observaciones a la o el docente

En esta actividad es importante que la o el docente promueva en las y los estudiantes la deducción de la fórmula que permite calcular la distancia entre dos puntos en el plano 3D. Se sugiere realizar el siguiente análisis:



Por lo tanto, $||\vec{v}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Además, es posible profundizar el análisis guiando a las y los estudiantes a deducir que todo vector en el plano 3D se puede escribir como combinación lineal de los tres vectores unitarios: $\hat{i} = (1,0,0)$; $\hat{j} = (0,1,0)$; $\hat{k} = (0,0,1)$.

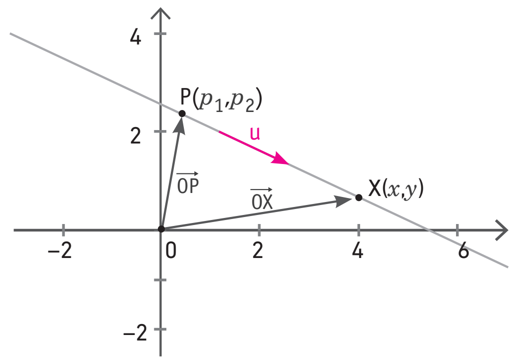


Por lo tanto, $(a,b,c) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$.

AE 05 Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas.

Observaciones a la o el docente

En la actividad 1, se sugiere a la o el docente que trabaje junto con el curso en deducir la ecuación vectorial de la recta y analizar la relación con la ecuación cartesiana, promoviendo de esta manera el desarrollo del razonamiento matemático. Para ello, se recomienda realizar el siguiente análisis: La ecuación vectorial de la recta corresponde al conjunto de puntos colineales al punto P y cuya dirección está dada por el vector de posición $\vec{u}$.

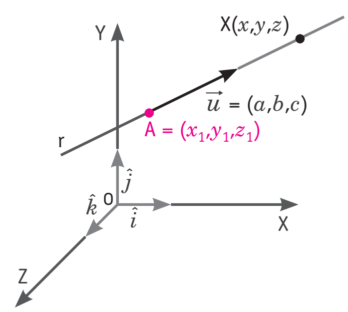


De la representación gráfica se infiere que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda\vec{u}$.

Si $\overrightarrow{OX} = (x,y)$, $\overrightarrow{OP} = (p_1,p_2)$ y $\vec{u} = (u_1,u_2)$.

La ecuación vectorial está dada por $(x,y) = (p_1,p_2) + \lambda(u_1,u_2)$.

Para deducir la ecuación vectorial en el plano 3D, se sugiere realizar el siguiente análisis:



De la representación gráfica se infiere que $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u}$.

Si $\overrightarrow{OX}$ = (x,y,z), $\overrightarrow{OA} = (a_1,a_2,a_3)$ y $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$.

La ecuación vectorial está dada por $(x,y,z) = (a_1,a_2,a_3) + \lambda(u_1,u_2,u_3)$.

1. Completan la siguiente tabla:

Puntos	Ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos A y B	Otros puntos que pertenecen a la recta (identificar por lo menos dos)
A(1,2,–1) y B(2,3,6)		
A(1,0,1) y B(2,4,3)		
A(10,4,–2) y B(5,–1,2)		

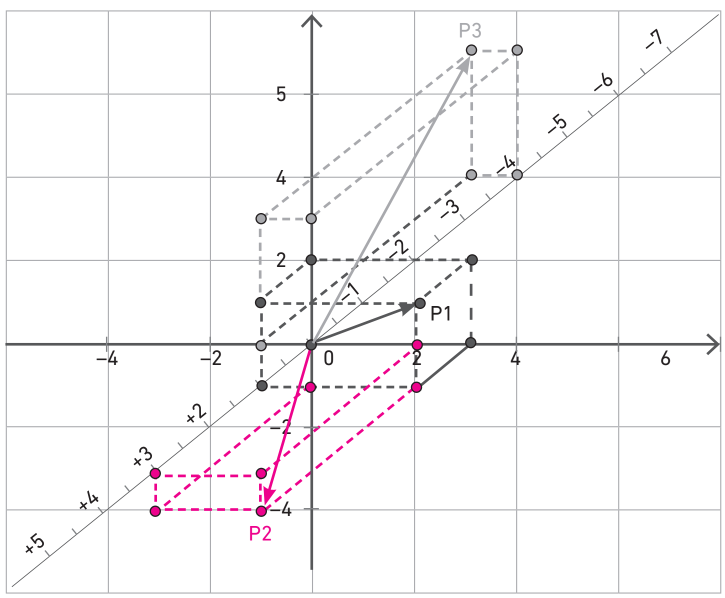
a. Responden: ¿Cuál es el vector asociado y el vector director para cada una de las ecuaciones vectoriales?

b. Remplazan el vector director de una recta por otro vector que permita representar la misma recta.

2. Transforman la ecuación vectorial de la recta $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a su forma cartesiana.

3. Dada la ecuación cartesiana de la recta $2x + y = 1$, consideran dos puntos que la satisfacen y determinan la ecuación vectorial de la recta.

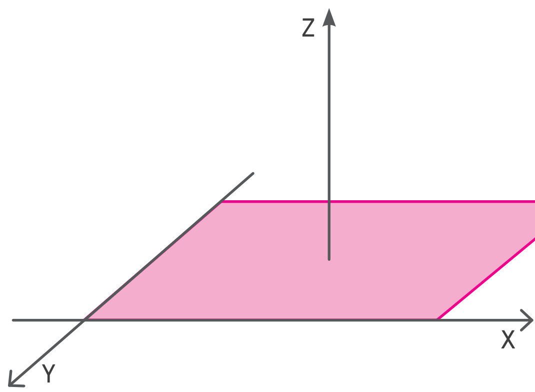
4. Dada la siguiente representación de los puntos P1, P2 y P3, elaboran la ecuación vectorial del plano que pasa por los tres puntos.



P1 = (3,2,1)
P2 = (2,–1,3)
P3 = (–1,3,–4)

AE 06 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio.

1. Describen el cuerpo que se obtiene al trasladar la siguiente figura 2D (un cuadrado de lado *a* cm) en dirección del eje Z:



Contestan las preguntas y argumentan sus respuestas:

a. ¿Cuál es la traslación que permite generar un cubo?

b. ¿Cuál es la traslación que permite generar un prisma de base cuadrada?

Observaciones a la o el docente

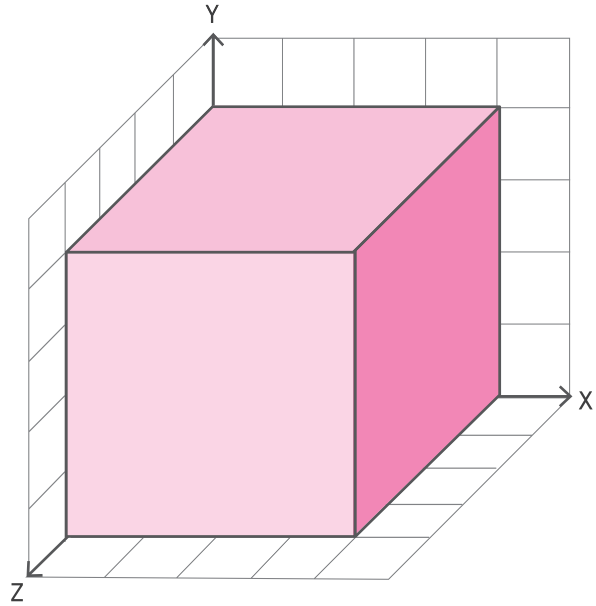
Para lograr diferentes niveles de desempeño, la o el docente puede modificar la actividad 1 y 2 estableciendo coordenadas a la región cuadrada y región triangular, respectivamente, y así poder solicitar a las o los estudiantes que justifiquen la respuesta al problema utilizando vectores y la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano 3D. Con esto se promueve la resolución de problemas mediante la aplicación de conceptos y procedimientos aprendidos en el AE 04.

2. Elaboran una representación gráfica en tres dimensiones del cuerpo y las coordenadas de los vértices al trasladar, en una distancia dada, un triángulo equilátero considerando las siguientes condiciones:

a. Trasladar el triángulo equilátero de forma perpendicular al plano XZ.

b. Trasladar el triángulo equilátero de forma paralela al eje X.

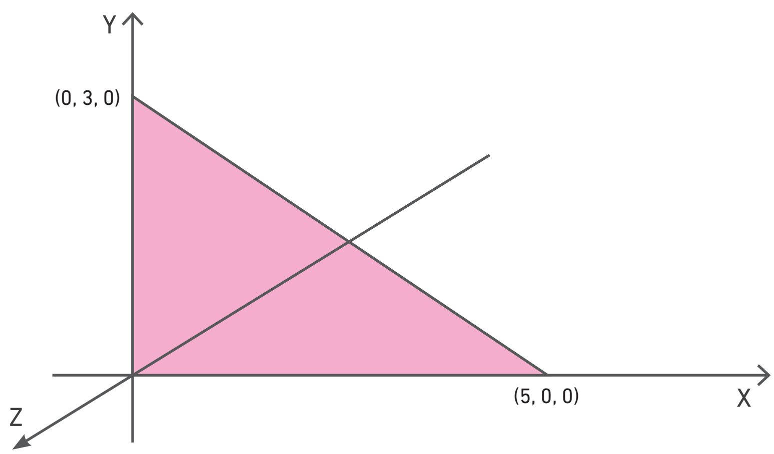
3. Dado el cubo azul representado en el plano tridimensional:



a. Identifican una figura geométrica y un vector de traslación que permita generar el cubo azul.

b. Responden: ¿Es correcto afirmar que existen al menos tres soluciones para generar el cubo azul mediante la traslación de una figura geométrica 2D? Argumentan su respuesta.

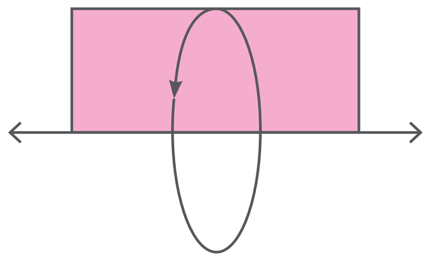
4. En la figura, el eje Z está orientado verticalmente al plano X/Y. Determinan el área de superficie y el volumen del cuerpo generado al trasladar en siete unidades, y de forma paralela al eje Z, la siguiente imagen:



AE 07

Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.

1. Describen el cuerpo que se obtiene al girar la siguiente figura 2D de forma rectangular:



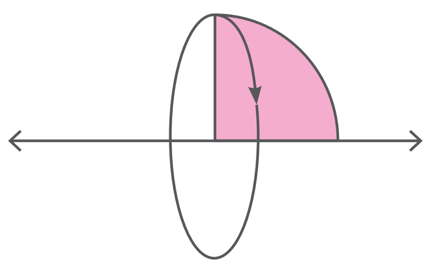
Contestan las preguntas y argumentan sus respuestas:

a. ¿Es correcto afirmar que siempre que se gira una región rectangular respecto de un eje se obtiene un cilindro?
b. Si la figura 2D es un cuadrado, ¿es correcto afirmar que al girar la región cuadrada respecto de un eje también se obtiene un cilindro?

Observaciones a la o el docente

La o el docente puede modificar esta actividad estableciendo coordenadas a la región rectangular y, así, orientar a las y los estudiantes a justificar la respuesta al problema utilizando vectores y la fórmula de distancia entre dos puntos en el plano 3D. Con esto se promueve la resolución de problemas mediante la aplicación de conceptos y procedimientos aprendidos en el AE 04.

2. Elaboran una representación gráfica en 3D del cuerpo que se obtiene al girar la siguiente figura:

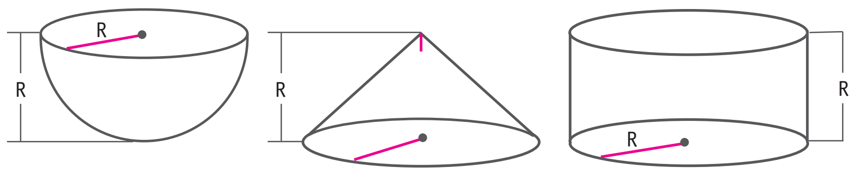


a. Responden: ¿Es correcto afirmar que se obtiene una esfera? Argumentan su respuesta.
b. Argumentan qué forma debe tener la figura original para obtener una esfera por rotación.

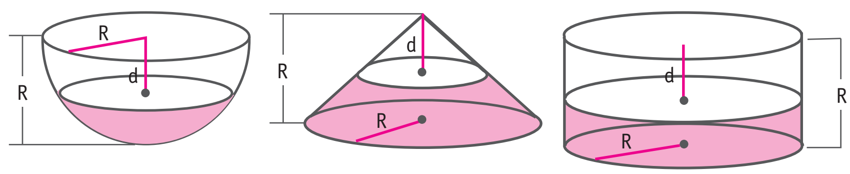
Observaciones a la o el docente

La o el docente puede modificar la actividad solicitando a las y los estudiantes que justifiquen la fórmula del volumen de una esfera basándose en el razonamiento de Arquímedes que se presenta a continuación.

Dada una semiesfera, un cono y un cilindro juntos, el matemático griego supuso que la esfera tenía radio R y tanto el cono como el cilindro tenían el mismo radio basal R. También supuso que las alturas del cono y el cilindro medían R, como muestra la siguiente figura:



Luego cortó las tres figuras con un plano paralelo a la base del cilindro y del cono, y a una distancia d de la parte superior de las figuras. Después se preguntó cómo serían las secciones determinadas por este plano en la semiesfera, el cono y el cilindro:



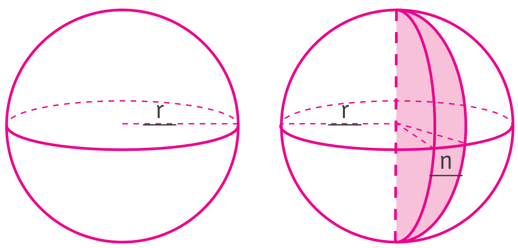
El radio de la sección circular de la esfera es $r^2 = R^2 - d^2$; el radio de la sección circular en el cono es d, y el radio de la sección circular en el cilindro es R. Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
\text{Área de la sección del cilindro} &= \pi \cdot R^2 \\
&= \pi \cdot R^2 \\
&= \pi \cdot (r^2 + d^2) \\
&= \pi \cdot r^2 + \pi \cdot d^2 \\
&= \text{Área de la sección de la semiesfera} + \\
&\quad\ \text{Área de la sección del cono}
\end{aligned}
$$

Es decir, la suma de las áreas de las secciones del cono y la semiesfera es igual al área de la sección del cilindro. Esto ocurre para cualquier valor de *d*. De la relación se infiere que: volumen del cilindro = volumen de la semiesfera + volumen del cono. Por lo tanto, si remplazamos en esta relación las fórmulas conocidas del volumen del cono y el cilindro, es posible determinar el volumen de la esfera:

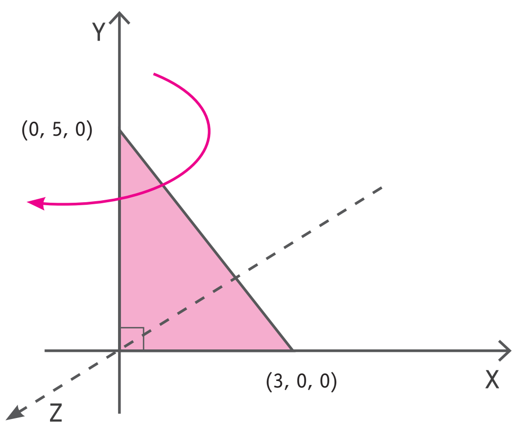
Volumen de la esfera = $\frac{4\pi^2 \cdot R^3}{3}$

Por último, la o el docente puede modificar la actividad solicitando a las y los estudiantes que justifiquen la fórmula del volumen de una sección de la esfera. Por ejemplo:



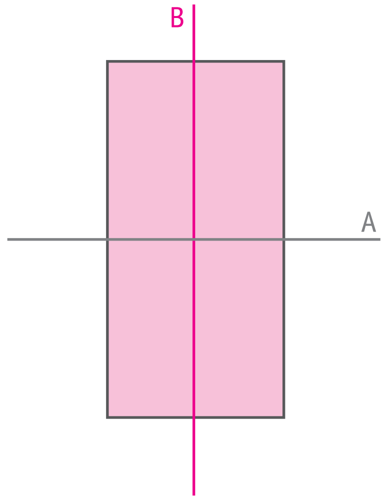
Volumen sección esfera = $\frac{\pi r^3 \, n^o}{270^o}$

3. Dibujan el cuerpo generado por rotación de un triángulo y determinan el área de superficie y su volumen. Utilizan la información de la siguiente figura:



Además, conjeturan si cambiaría el volumen del cuerpo y el área de la superficie al intercambiar el eje de rotación Y por el eje X.

4. Conjeturan acerca del cuerpo que se genera si se gira el rectángulo respecto del eje A y del eje B.



Luego, llevan a cabo lo siguiente:

a. Formulan y verifican conjeturas respecto del volumen de ambos cuerpos.
b. Desarrollan una expresión algebraica para calcular ambos volúmenes.
c. Comparan ambas expresiones algebraicas y explican si son equivalentes.

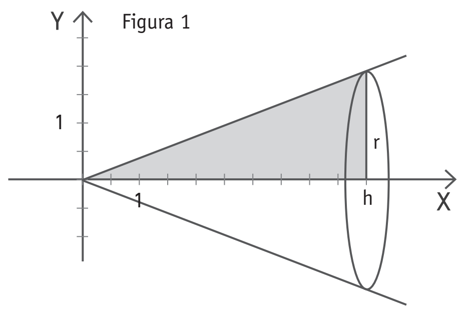
EJEMPLO DE EVALUACIÓN

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
AE 07 Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.	› Determinan el volumen y la superficie de algunos cuerpos generados por rotación de rectángulos y triángulos.

ACTIVIDAD PROPUESTA

Observe las figuras y lleve a cabo lo solicitado:

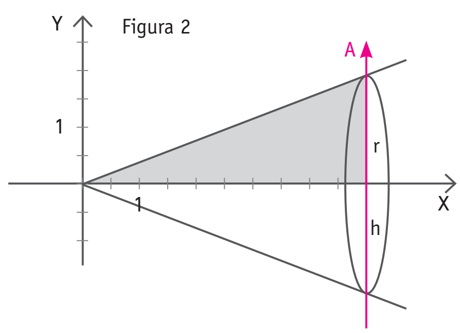
En la figura 1 se representa un cono generado por la rotación del triángulo de color gris alrededor del eje X.



a. Determine los vértices del triángulo.

b. Calcule el volumen del cono de rotación.

c. Calcule el área de la superficie del cono de rotación.



d. Conjeture acerca de la forma del cuerpo geométrico que se genera por rotación del triángulo alrededor del eje A (figura 2).

e. Elabore un dibujo del cono de rotación completando la figura 2.

f. Determine la razón entre el volumen del primer cono de rotación y el del segundo. Exprésela en porcentaje.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al evaluar, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

› Determina, basándose en las coordenadas de los vértices, el volumen y la superficie del cono.

› Reconoce que al modificar los ejes de rotación se modifica la medida del radio y de la altura del cono.

› Elabora un dibujo 3D del cono rotado respecto del eje A.

› Verifica que el volumen depende cuadráticamente del radio y solamente linealmente de la altura, y explican que los volúmenes no son iguales.

› Determina la razón entre ambos volúmenes y la expresan correctamente en porcentaje.

Semestre

2

UNIDAD 3

DATOS Y AZAR 1

PROPÓSITO

En esta unidad se busca que los y las estudiantes evalúen críticamente la información del medio que los rodea. Se introduce el concepto de "variable aleatoria continua" para determinar la probabilidad de mediciones relacionados con intervalos; en particular, se pretende que analicen distribuciones aleatorias de magnitudes, como peso, temperatura, estaturas u otras.

Además, trabajan con diferentes representaciones y conceptos estadísticos para describir situaciones relativas a su entorno o al futuro laboral. También, como antesala de la siguiente unidad, se espera que desarrollen y apliquen la función de densidad para caracterizar el comportamiento de una variable aleatoria continua.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Probabilidad condicional, variable aleatoria discreta, función de probabilidad, distribuciones de probabilidad, distribución binomial, valor esperado, varianza, desviación estándar.

CONCEPTOS CLAVE

Variable aleatoria continua, probabilidad de ocurrencia, eventos puntuales, intervalos, función de densidad.

CONTENIDOS

- Variable aleatoria continua.
- Distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua.
- Función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria continua.

HABILIDADES

- Hacer inferencias sobre la población considerando el espacio muestral.
- Argumentar sobre presentaciones gráficas publicadas en medios de comunicación.
- Analizar si ciertos datos estadísticos pertenecen a variables aleatorias discretas o continuas.
- Responder preguntas estadísticas y probabilísticas relacionadas con la función de densidad de probabilidad

ACTITUDES

- Desarrollar interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.
- Demostrar una actitud crítica al analizar fuentes de información.

APRENDIZAJES ESPERADOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Las y los estudiantes que han logrado este aprendizaje:*
AE 08 Evaluar críticamente información estadística extraída de medios de comunicación, tales como periódicos y revistas, o de internet.	› Determinan posibles desproporciones en la presentación de gráficos de líneas, por ejemplo, la falta del origen en el sistema. › Conjeturan si el espacio muestral tiene el tamaño suficiente para hacer inferencias sobre la población. › Analizan, en resultados de encuestas, si la medida citada (por ejemplo, la media o la mediana) representa adecuadamente la información.
AE 09 Interpretar el concepto de variable aleatoria continua.	› Analizan, en gráficos o tablas empíricas, las distribuciones de frecuencias relativas de datos estadísticos, como peso, estatura o presión. › Determinan en ejemplos concretos si una variable aleatoria es discreta o continua.
AE 10 Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua	› Modifican histogramas de distribuciones de probabilidad mediante el cambio de la amplitud de los intervalos y el número de observaciones, registrando los efectos que se generan en la forma del histograma. › Aproximan, de manera intuitiva, el gráfico de líneas por una curva. › Relacionan áreas de rectángulos de un intervalo con el cálculo de la probabilidad. › Aplican la función de densidad de probabilidad para responder preguntas estadísticas y probabilísticas.

OFT	APRENDIZAJES ESPERADOS EN RELACIÓN CON LOS OFT

› Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.
› Buscar y acceder a información de diversas fuentes virtuales.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA UNIDAD

En esta unidad, se espera que los y las estudiantes evalúen críticamente la información publicada en medios de comunicación e internet, a partir del análisis, la interpretación y la síntesis de dicha información, con lo cual podrán obtener resultados sobre una población considerando su tamaño y la distribución de la variable; inferir conclusiones a partir de la media, la varianza y la desviación estándar; y tomar decisiones fundamentadas en información estadísticamente significativa. Esto facilita que los y las estudiantes logren establecer relaciones pertinentes y útiles para resolver un problema basándose en información explícita e implícita del enunciado y producir nueva información a partir de la construcción y/o interpretación de tablas y/o gráficos.

En cuanto al aprendizaje del concepto de variable aleatoria continua, se recomienda iniciar dicho proceso con ejemplos concretos y contextualizados para establecer la diferencia entre una variable aleatoria discreta y continua. En específico, las y los estudiantes deben comprender que toda variable continua puede tomar cualquier valor en el conjunto de los números reales. Además, basándose en ejemplos, pueden conjeturar que la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor específico es cero.

Se sugiere que el concepto de densidad de probabilidad se desarrolle a partir de frecuencias relativas de observaciones relacionadas con intervalos. Para ello, se realiza un proceso graduado de aproximación que incluye un aumento del número de observaciones junto con una disminución de la amplitud de los intervalos considerados, logrando que las frecuencias relativas casi no varíen. En las representaciones gráficas se visualiza un cambio de los gráficos de barras y gráficos de segmentos hacia la representación de una curva. Se define una variable aleatoria continua X que representa las frecuencias relativas de las observaciones y se considera un aumento infinito de las observaciones junto con una disminución infinita de las amplitudes de los intervalos. Este proceso lleva a una curva límite de los gráficos anteriores y representa una función de densidad de probabilidad. Al mismo tiempo, se sugiere explicar, para una mayor comprensión del concepto, que la función densidad de probabilidad no representa la probabilidad para un caso particular ($X = x$), sino que permite calcular la probabilidad de la variable X en un intervalo específico ($x_1 \leq X \leq x_2$). Esto permite comprender que las probabilidades se relacionan con intervalos $[x_1, x_2]$ y que el valor de la probabilidad de un suceso para dicho intervalo se determina como el área bajo la curva de la función de densidad de probabilidad, entre el eje X y las rectas $X = x_1$ y $X = x_2$. Para facilitar el cálculo y análisis de los resultados, se sugiere la incorporación de tecnología (Excel, GeoGebra y calculadoras, entre otros) para inferir conclusiones respecto de los contextos cotidianos o matemáticos involucrados en la resolución de problemas de función de densidad de probabilidad.

Respecto de la evaluación, se aconseja a la o el docente monitorear el logro de los aprendizajes a medida que avanza la unidad y no solamente al final de ella. De este modo, sabrá si las y los estudiantes comprenden y aplican los conceptos y procedimientos al trabajar con problemas de variables aleatorias continuas y de densidad de probabilidad. Así, el o la docente podrá obtener evidencia de aprendizaje de los distintos niveles de desempeño y diseñar procesos de retroalimentación para las diferentes dificultades o errores conceptuales/procedimentales propios de los contenidos que se trabajan en esta unidad.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Las sugerencias de actividades presentadas a continuación pueden ser seleccionadas, adaptadas y/o complementadas por la o el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

AE 08 Evaluar críticamente información estadística extraída de medios de comunicación, tales como periódicos y revistas, o de internet.

Observaciones a la o el docente

La actividad 1 muestra que la elaboración de un gráfico sin el origen del sistema de coordenadas podría representar variaciones desproporcionadas y generar conclusiones erróneas. No obstante, al considerar la media y la desviación estándar, las y los estudiantes pueden inferir y verificar que los puntajes no se desplazan más allá de dos desviaciones estándar de la media. Además, la o el docente puede orientar al curso a determinar el coeficiente de variación en porcentaje (el coeficiente de variación corresponde a la relación entre la desviación estándar y la media: $C_v = \frac{\sigma}{|\overline{x}|}$, $\overline{x} > 0$. Esto permitirá a las y los estudiantes constatar que el valor del coeficiente de variación en porcentaje es aproximadamente 1%. Con este resultado, pueden cuestionar la representación gráfica de la actividad 1.

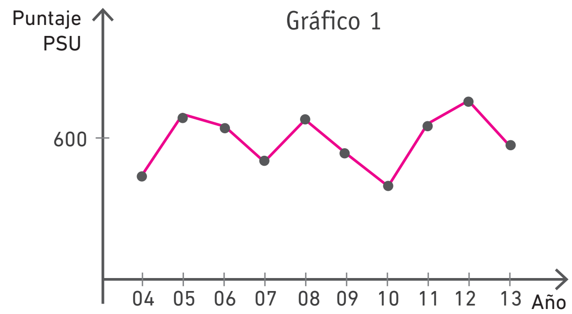
Para lograr diferentes niveles de desempeño por parte de las y los estudiantes, la o el docente puede solicitar construir un gráfico considerando la escala en puntaje cero.

Además, es importante que la o el docente promueva aprendizajes contextualizados para que los y las estudiantes desarrollen progresivamente la alfabetización estadística, lo que les entrega herramientas para la toma de decisiones fundamentadas.

1. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

La tabla muestra los puntajes promedio obtenidos en la PSU por un colegio desde el año 2004 hasta 2013. Mediante el gráfico de líneas, el colegio quiere representar el desarrollo de los puntajes.

Año	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Puntaje	591	605	604	595	605	600	589	602	608	601

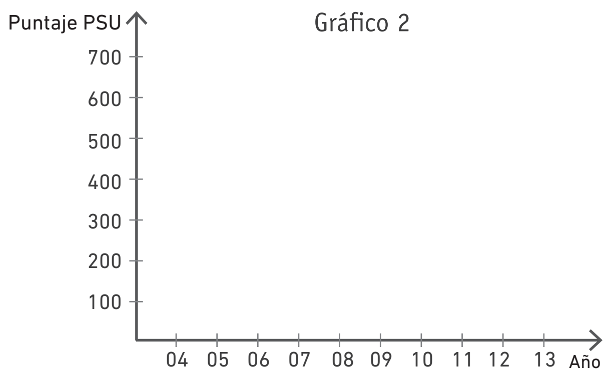


a. Considerando la información que entrega el gráfico, ¿se puede concluir que se muestran grandes variaciones en los puntajes? Razonan y comunican su respuesta.

b. Considerando la media y la desviación estándar de la distribución de los puntajes, ¿se puede concluir que los puntajes muestran variaciones importantes? Comparan con las interpretaciones dadas en el ejercicio anterior. Razonan y comunican su respuesta.

c. Elaboran, con los datos de la misma tabla, el gráfico de líneas que tiene el origen en cero puntos.

Año	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
Puntaje	591	605	604	595	605	600	589	602	608	601

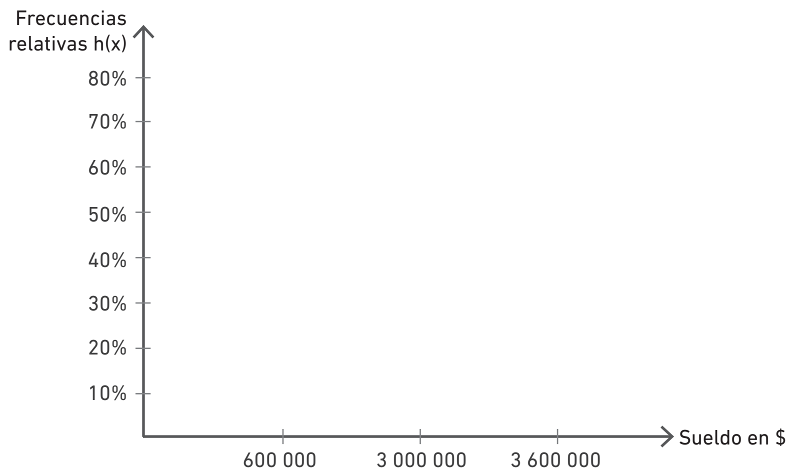


d. Comparan las conclusiones del gráfico 1 con las conclusiones del gráfico 2.

2. Se les plantea el siguiente problema y realizan las actividades:

Un banco hace propaganda del pago de un sueldo promedio de $ 1 250 000 que reciben sus integrantes. La estructura de los sueldos es la siguiente: $ 600 000 para 18 personas de un cargo inferior, $ 3 000 000 para los 4 jefes de departamentos, y $ 3 600 000 para los 2 directores.

a. Verifican si el sueldo promedio enunciado es correcto.
b. Elaboran un gráfico de frecuencia relativa porcentual que represente los sueldos.



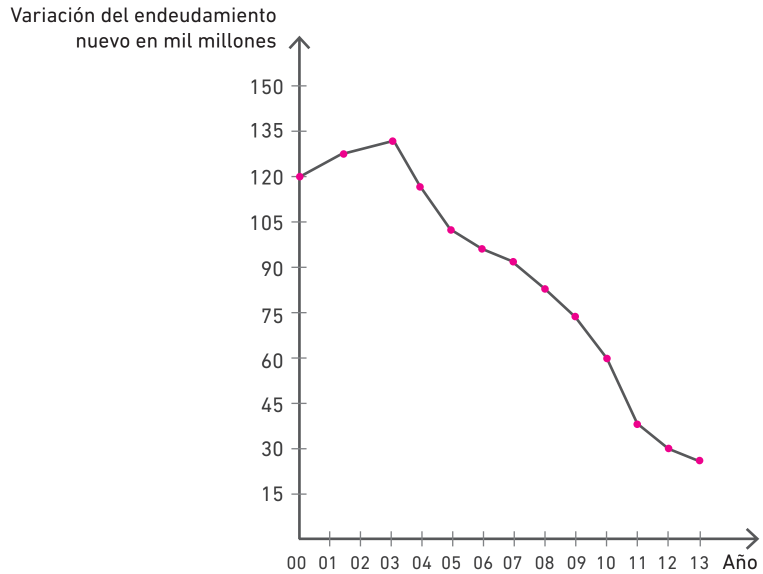
c. Describen y comentan el gráfico de barras que representa la distribución de las frecuencias relativas de los sueldos pagados.
d. Determinan e interpretan la varianza y la desviación estándar de la distribución de las frecuencias relativas de los sueldos pagados.
e. Discuten con el curso acerca de lo que dice y lo que oculta la afirmación: “el sueldo promedio del banco es de $ 1 250 000”. Argumentan su respuesta.

Observaciones a la o el docente

La actividad 3 muestra una representación arbitraria de información estadística que a veces se practica en los medios de comunicación. Si se representa solamente el endeudamiento nuevo, el gráfico muestra una baja y se puede inferir erróneamente que el endeudamiento está disminuyendo, aunque el endeudamiento real sigue subiendo, como se muestra en el segundo gráfico. Es importante que el o la docente destaque la diferencia entre el desarrollo global de una magnitud y su variación de un intervalo a otro.

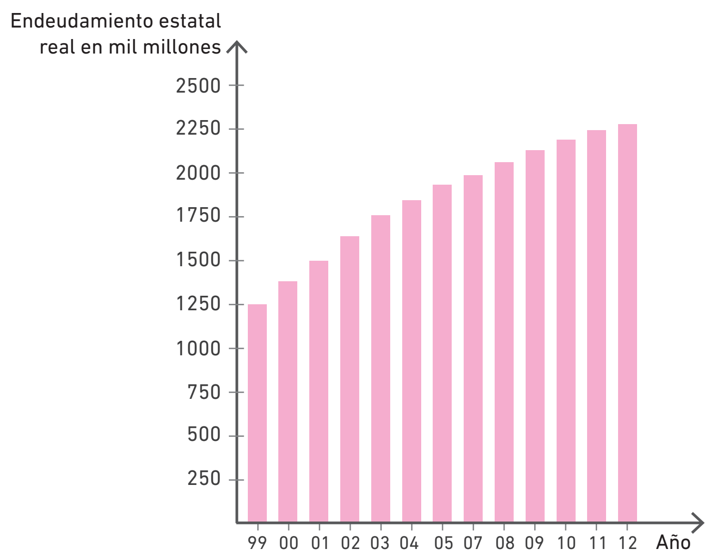
3. Se les presenta la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

El gobierno de un país publicó, mediante un gráfico, la variación del endeudamiento nuevo, que se refiere al endeudamiento estatal real del año anterior.



a. Contestan: ¿Se puede concluir que el endeudamiento estatal se reduce? Razonan y comunican su respuesta.

b. Comparan el gráfico de líneas con el histograma del endeudamiento estatal real y afirman o modifican la respuesta anterior. Razonan y comunican su respuesta.



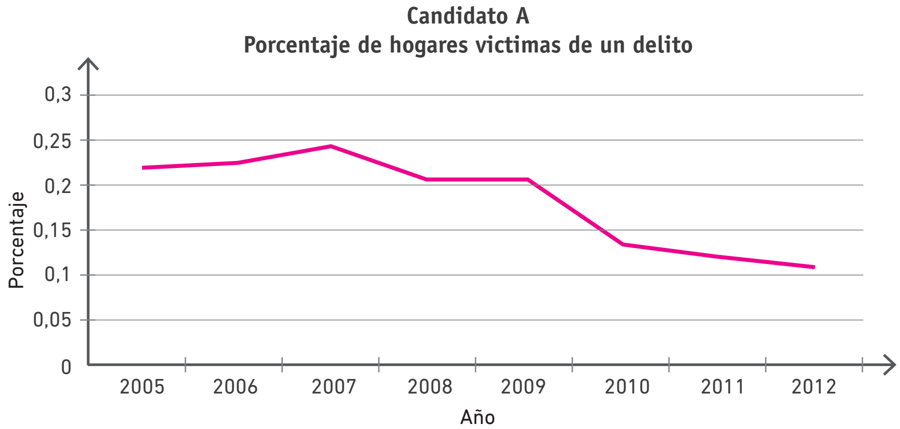
Observaciones a la o el docente

En la actividad 4, es recomendable que las y los estudiantes sean críticos de la información que entregan los medios de comunicación, y que analicen e interpreten si la información entregada en ambos gráficos considera todas las variables del fenómeno de interés.

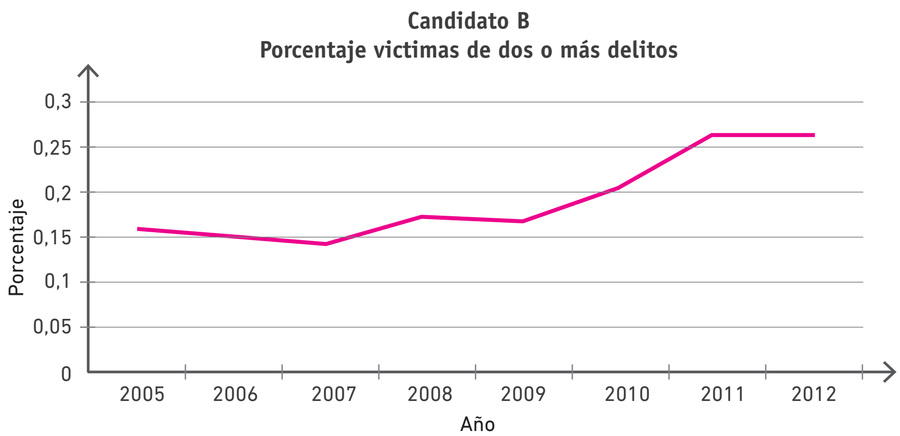
4. Se les plantea la siguiente situación y realizan las actividades:

Dos candidatos a alcalde de una comuna muestran las cifras de hogares que han sido víctimas de algún delito en los últimos 7 años.

a. En función del gráfico que muestra el candidato A, ¿se puede afirmar que los delitos han disminuido? Argumentan su respuesta.



b. Comparan el gráfico del candidato A con el gráfico que muestra el candidato B y analizan si es preciso reafirmar o cambiar la respuesta que entregaron en el ejercicio anterior. Discuten con el curso y argumentan su respuesta.



AE 09 Interpretar el concepto de variable aleatoria continua.

1. Resuelven el siguiente problema:

   Una empresa de transportes quiere estudiar el tiempo de espera de sus clientes en la estación de buses.

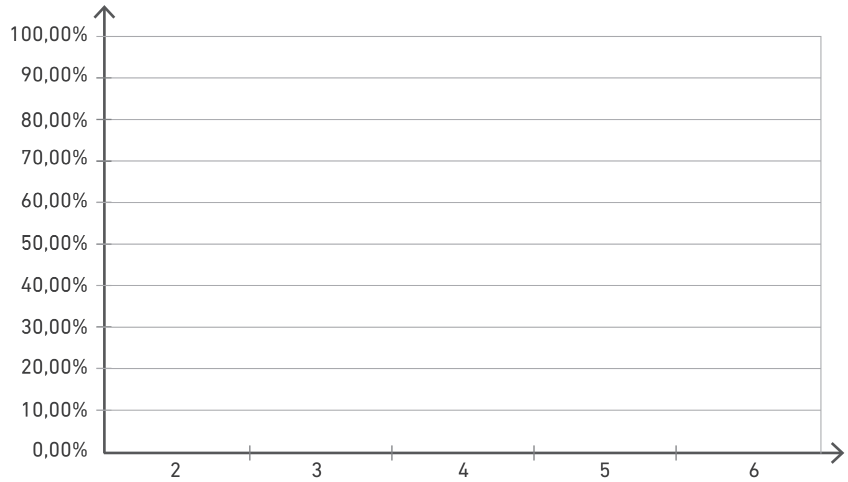
   a. Determinan posibles resultados de la variable tiempo de espera. Argumentan su respuesta.
   b. Explican por qué entre dos tiempos de espera de dos personas siempre puede haber un tiempo de espera de alguna otra persona que está entre ellos. Argumentan su respuesta.

> **Observaciones a la o el docente**
> En la actividad 2, las y los estudiantes deben comprender que una variable aleatoria continua puede obtener cualquier valor en un intervalo predeterminado y que estos valores están limitados por los instrumentos de medición y por la exactitud de ellos.

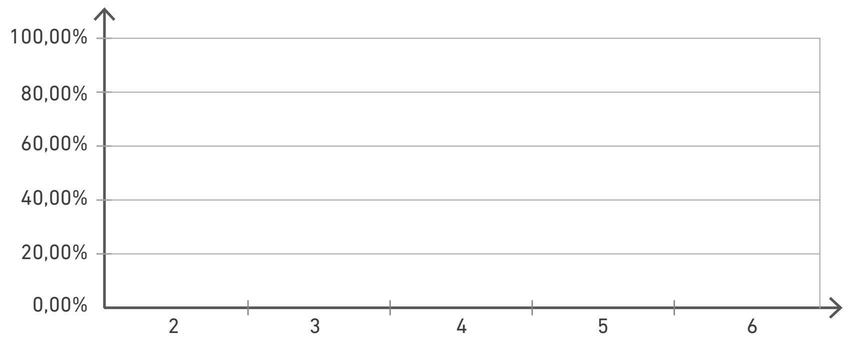
2. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:
   En un hospital se registran los pesos de los bebés en kilogramos. Los siguientes datos muestran los datos registrados.

3,3455	3,6526	4,9876	5,0871	5,3425	3,5345
3,0182	4,0238	5,5704	3,9758	3,8374	3,0234
3,0923	5,0385	5,6461	3,0239	3,0645	4,9823
4,4329	5,5421	3,4572	5,4533	5,4534	5,4123
3,8578	3,0129	5,5634	3,6456	5,7453	4,0945
4,0454	5,0935	5,0237	4,9238	5,9238	4,0239

a. Construyen un gráfico de barras para el peso, considerando un redondeo de los pesos al entero más cercano.



b. Construyen un gráfico de barras para el peso, considerando un redondeo de los pesos al decimal más cercano.



c. Comparan y conjeturan sobre las diferencias entre los gráficos de barras en relación con el redondeo y la exactitud del valor de la variable peso. Argumentan su respuesta.

Observaciones a la o el docente

Una variable aleatoria es continua si el conjunto de todos los valores de la variable abarca un intervalo de números reales. Por ejemplo, la variable que asigna la estatura a una persona de una población determinada es una variable continua. Los números reales son densos, lo cual significa que entre dos números reales dados existe un conjunto infinito, no numerable, de números reales. Esto hace que, en la teoría de probabilidades, se establezca que la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor determinado sea cero.

El siguiente ejemplo muestra un proceso aleatorio que está presente en toda la naturaleza: la descomposición radioactiva. Aunque la descomposición de una cantidad radioactiva se describa mediante una función exponencial, la desintegración de un solo átomo es aleatoria, es decir, no se puede predecir el momento preciso en el cual el próximo átomo se descompondrá. Con un generador sencillo de números aleatorios se puede simular un proceso aleatorio. En este caso se delimita al conjunto de los números racionales que también es denso.

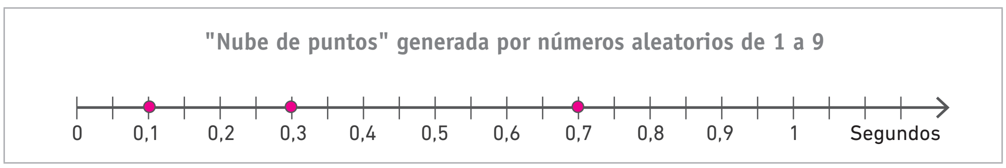
Consideremos como ejemplo ficticio una fuente radioactiva que se descompone con la intensidad de 1 Becquerel (1 Bq), que significa la descomposición de 1 átomo por segundo. Al momento ficticio de $t = 0\ s$, "ocurre" la descomposición de un átomo. Entonces, simulamos la descomposición aleatoria del próximo átomo de la siguiente manera: en un primer paso, generamos números aleatorios del ámbito numérico del 1 a 9. Por ejemplo, si resulta 8, la próxima desintegración ficticia sería en el instante $t = 0{,}8\ s$. Si aumentamos el ámbito numérico de 1 a 99, generamos instantes ficticios de descomposición con una precisión de centésimas de segundos. Por ejemplo, si resulta 43, el instante ficticio de la próxima descomposición radioactiva sería $0{,}43\ s$. Al aumentar el ámbito numérico del generador de números aleatorios, los instantes ficticios se generan con más y más cifras decimales.

En internet pueden encontrarse generadores de números aleatorios gratuitos, por ejemplo, en los sitios www.augeweb.com/azar/ o www.echaloasuerte.com. Además se pueden generar números aleatorios por funciones del programa Excel o funciones de azar en calculadoras.

A continuación se presentan ejemplos de generación de números aleatorios del 1 al 9, del 1 al 99, del 1 al 999 y del 1 al 9 999:

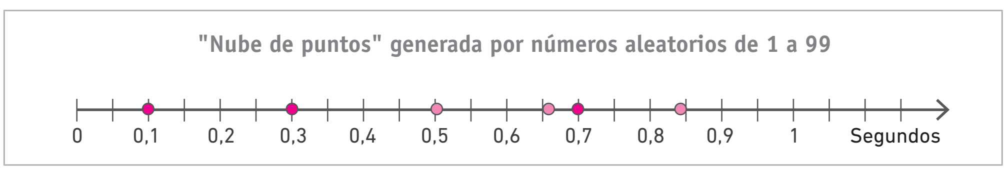
Del 1 al 9

Número 3	Instante 0,3 s	Número 1	Instante 0,1 s	Número 7	Instante 0,7 s



Del 1 al 99

Número 84	Instante 0,84 s	Número 51	Instante 0,51 s	Número 67	Instante 0,67 s



Del 1 al 999

Número 557	Instante 0,557 s	Número 82	Instante 0,082 s	Número 9	Instante 0,009 s

"Nube de puntos" generada por números aleatorios de 1 a 999

Del 1 al 9 999

Número 4672	Instante 0,4672 s	Número 3912	Instante 0,3912 s	Número 9735	Instante 0,9735 s

"Nube de puntos" generada por números aleatorios de 1 a 9 999

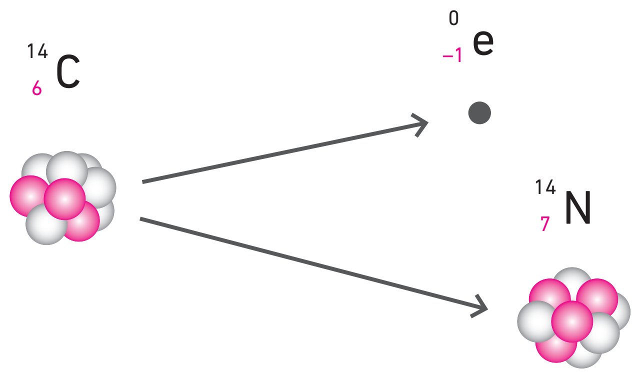
En la siguiente tabla se muestra el desarrollo de las probabilidades en dependencia del ámbito numérico de los números aleatorios.

Ámbito de números aleatorios naturales generables por un generador de números aleatorios	Probabilidad de obtener un número específico en el ámbito de los números aleatorios	Probabilidad de obtener un instante específico de tiempo en la línea de tiempo entre 0 s y 1 s
[1, 9]	$0,\overline{1}$	$0,\overline{1}$
[1, 99]	$0,\overline{01}$	$0,\overline{01}$
[1, 999]	$0,\overline{001}$	$0,\overline{001}$
[1, 9 999]	$0,\overline{0001}$	$0,\overline{0001}$
...	...	...
Se podrían generar números [1, ∞[infinitamente grandes.	Se acercaría a 0.	Se acercaría a 0.

Se sugiere llevar a cabo un trabajo grupal para obtener, mediante la generación de números aleatorios, una variedad de “nubes de puntos” que permitan simular y visualizar el problema de desintegración de un átomo.

3. Se les presenta la siguiente información:

Para la datación de la edad de objetos fósiles, se utiliza el método de desintegración radioactiva mediante el isótopo radioactivo de carbono $^{14}C_6$ que se convierte en nitrógeno $^{14}N_7$ (ver esquema). Aunque la desintegración de una cantidad de materia radioactiva se pueda describir mediante una función exponencial, la desintegración de un solo átomo pertenece a un proceso aleatorio y no se puede predecir el instante preciso en el cual el próximo átomo se descompondrá.



Consideran la siguiente situación:

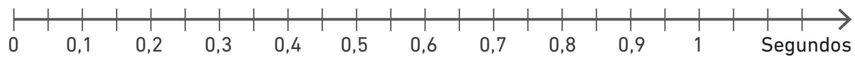
Se registraron las descomposiciones radioactivas de una cantidad de carbono $^{14}C_6$ con la intensidad aproximada de 1 Becquerel (1 Bq, que equivale a 1 descomposición por segundo). Al momento $t = 0$ s, ocurrió la desintegración de un átomo. Con un generador de números aleatorios se quiere modelar el momento en el cual podría ocurrir la próxima desintegración aleatoria de un átomo de $^{14}C_6$. Los números generados al azar se transforman en instantes de tiempo, como se muestra en la tabla.

Número aleatorio gererado en [1, 9]	Próxima desintegración aleatoria
3	0,3 s
Número aleatorio gererado en [1, 99]	Próxima desintegración aleatoria
74	0,74 s
Número aleatorio gererado en [1, 999]	Próxima desintegración aleatoria
29	0,029 s
Número aleatorio gererado en [1, 9 999]	Próxima desintegración aleatoria
8 537	0,8537 s

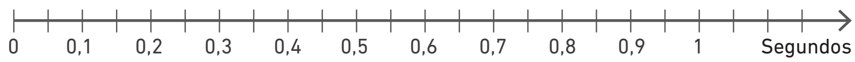
A continuación, llevan a cabo las actividades:

a. Generan cinco números aleatorios naturales en cada uno de los intervalos [1, 9], [1, 99], [1, 999], [1, 9 999] u otros. Transforman los números aleatorios obtenidos en momentos de tiempo e identifican las marcas en las líneas de tiempo que se muestran a continuación.

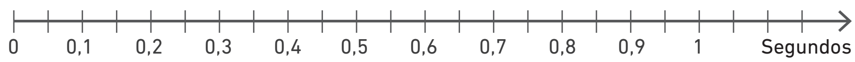
"Nube de puntos" generada por números aleatorios de 1 a 9



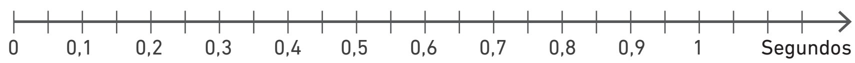
"Nube de puntos" generada por números aleatorios de 1 a 99



"Nube de puntos" generada por números aleatorios de 1 a 999



"Nube de puntos" generada por números aleatorios de 1 a 9 999



b. Describen y comentan el desarrollo de la “nube de puntos” en dependencia del ámbito de los números aleatorios.

c. Determinan las probabilidades de obtener un momento específico de tiempo en el que el próximo átomo se podría descomponer. Completan la tabla e interpretan los datos en función del contexto del problema.

Intervalo de números aleatorios naturales generables por un generador de números aleados	Probabilidad de obtener un número específico en el ámbito de los números aleatorios	Probabilidad de obtener un instante específico de tiempo en la línea de tiempo entre 0 s y 1 s
[1, 9]	$0,\overline{1}$	$0,\overline{1}$
[1, 99]		
[1, 999]		
[1, 9 999]		
...	...	...

d. Contestan: ¿A qué valor se acerca la probabilidad de generar un determinado número, si se generan números aleatorios naturales con infinitos dígitos? Razonan y explican su respuesta.

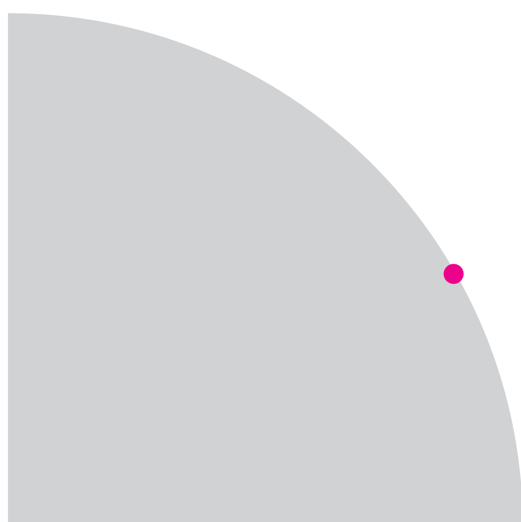
e. Conjeturan sobre la probabilidad de momentos discretos en los que se podría efectuar una descomposición radioactiva en el caso del ejercicio anterior. Argumentan su conjetura.

Observaciones a la o el docente

Para la actividad 3 y 4 se sugiere explicar que la obtención de la "nube de puntos" está relacionada con diferentes operaciones. En particular, en la generación de la "nube de puntos" de la actividad 3, se debe dividir por 10, 100, 1 000 y así sucesivamente según el intervalo seleccionado; y en la generación de la "nube de puntos" de la actividad 4, se debe multiplicar por 10 los valores aleatorios obtenidos para el intervalo [0, 9], por 100 los valores aleatorios obtenidos para el intervalo [0, 90], y por 1 000 los valores aleatorios obtenidos para el intervalo [0, 900].

4. Llevan a cabo la siguiente actividad experimental:

a. Generan números aleatorios del 0 a 9, luego, del 0 al 90 y finalmente del 0 al 900, los cuales se transforman en ángulos centrales de la cuarta parte de un círculo. Con un transportador, ponen las marcas de los ángulos en el perímetro del sector circular, como muestra la figura. Los números aleatorios obtenidos por un simulador (generador aleatorio de números naturales) se convierten en ángulos centrales, según la tabla presentada a continuación.



Ejemplo: El número generado sea 3 que se transforma en el ángulo 30º. Se muestra la posición de un punto en el perímetro que corresponde a un ángulo de 30º.

Números aleatorios gererados en [0, 9]	Ángulos centrales
1 - 7 - 5	10º - 70º - 50º
Números aleatorios gererados en [0, 90]	Ángulos centrales
56 - 14 - 8	56º - 14º - 8º
Números aleatorios gererados en [0, 900]	Ángulos centrales
485 - 9 - 64	48,5º - 0,9º - 6,4º

b. Generan cinco números aleatorios naturales en cada uno de los intervalos [0, 9], [0, 90], [0, 900]. Transforman los números en ángulos centrales e identifican las marcas en el perímetro del sector circular, como muestra la figura.

c. Describen y comentan el desarrollo de la "nube de puntos" en dependencia del ámbito de los números aleatorios generados.

d. Determinan las probabilidades de obtener un ángulo en el perímetro del sector circular y completan la tabla.

Intervalo de números aleatorios	Probabilidad de obtener un ángulo central	Diferencia entre dos ángulos centrales
[0, 9]	$\frac{1}{10} = 0{,}1$	1
[0, 90]		
[0, 900]		
[0, 9 000]		
...	...	...

e. Responden: ¿A qué valor se acerca la probabilidad de generar un determinado número, si se generan números aleatorios naturales con infinitos dígitos? Razonan y explican la respuesta.

f. Conjeturan sobre la probabilidad de momentos específicos en los cuales se podría efectuar una descomposición radioactiva en el caso del ejercicio anterior. Razonan y explican la conjetura.

5. Determinan cuáles de las siguientes variables aleatorias X son discretas o continuas. Razonan y explican sus respuestas.

a. La duración de vida de un átomo radioactivo hasta su descomposición.
b. La suma de los números de un lanzamientos simultáneo de 100 dados.
c. El peso de recién nacidos en Chile.
d. La apariencia de la letra ñ en textos escolares chilenos.
e. La temperatura media mensual en la zona costera de una región de Chile.
f. La cantidad de autos que pasa diariamente por una plaza de peaje.
g. Ser portador de un cierto grupo sanguíneo.
h. La estatura de las mujeres chilenas.
i. La cantidad de lluvia caída anualmente en la región de Los Ríos.

AE 10

Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua.

Observaciones a la o el docente

Para que los y las estudiantes comprendan el concepto de función de densidad de probabilidad se deben desarrollar registros de eventos aleatorios que están sometidos a dos cambios simultáneos: el aumento del número de las observaciones de los eventos y la disminución de la amplitud de los intervalos en los cuales se observan los eventos. De esta manera, las frecuencias relativas por amplitud del intervalo casi no varían y la representación gráfica se aproxima a una curva. Por lo tanto, para una variable aleatoria continua X, la frecuencia relativa por amplitud del intervalo se convierte en probabilidad por amplitud del intervalo, lo que se denomina "densidad de probabilidad". Por lo tanto, la curva límite que resulta del proceso de aproximación anteriormente descrito representa una función de densidad de probabilidad. Es importante destacar que las ordenadas de los puntos de esta curva límite no representan probabilidades, sino que densidades de probabilidades. Con las densidades de probabilidad se pueden obtener probabilidades relacionadas con un intervalo $[x_1, x_2]$. En este caso, se debe calcular el área bajo la curva entre las rectas $X = x_1$ y $X = x_2$. En ejercicios a nivel escolar, sin conocimientos de la integral definida de una función, es suficiente aproximar el área bajo la curva.

1. Se les plantea la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

En eventos de gran convocatoria, como conciertos de música pop o partidos de fútbol, las personas no llegan al mismo tiempo al lugar donde se llevan a cabo. Horas antes del inicio de un evento, no hay gran aglomeración de personas, y en un lapso de tiempo cercano al inicio, se reúne una multitud frente a las diferentes entradas del recinto, lo que implica el ingreso de muchas más personas en breves intervalos de tiempo.

En un determinado evento, algunas horas antes de su inicio, entraron 100 personas dentro un lapso de 10 minutos y se registró el tiempo entre dos llegadas consecutivas en 10 intervalos de 1 minuto. Un poco más tarde, llegaron 1000 personas en 10 minutos y se registró el tiempo entre dos llegadas consecutivas, pero ahora en 20 intervalos de medio minuto. En las tablas de abajo se representan posibles registros de llegadas de personas.

a. Calculan las frecuencias relativas por amplitud del intervalo (amplitud 1). Completan la tabla 1.

Tabla 1

Intervalo de amplitud 1 min	Número de llegadas de un total de 100 personas	Frecuencia relativa por intervalo de amplitud 1
]0,1]	3	0,03
]1,2]	2	
]2,3]	4	
]3,4]	7	
]4,5]	8	
]5,6]	10	
]6,7]	14	
]7,8]	16	
]8,9]	17	
]9,10]	19	

b. El gráfico 1.1 muestra las frecuencias relativas de la llegada de 100 personas al estadio por un lapso de 10 minutos subdividido en intervalos de 1 minuto. En él se representan los datos de la tabla 1. Calculan el área de las barras.

c. Formulan y verifican conjeturas acerca de la suma obtenida en b.

d. Responden: ¿Qué relación observan entre el gráfico 1.1 y el gráfico 1.2?

Frecuencia relativa por amplitud del intervalo

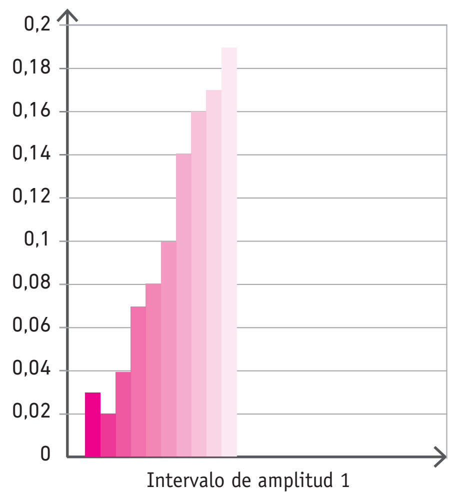


Gráfico 1.1

Frecuencia relativa por amplitud del intervalo

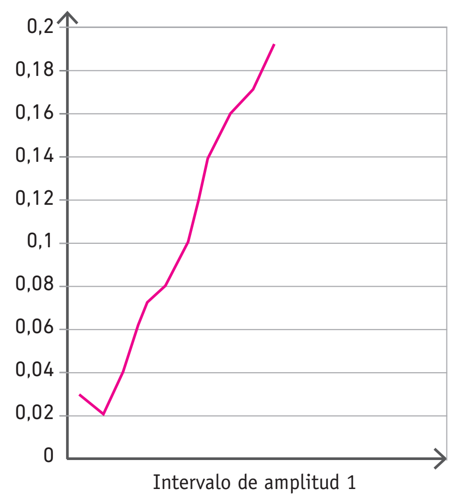


Gráfico 1.2

e. En la tabla 2 se representa la entrada de 1 000 personas al estadio registrada en un lapso de 10 minutos subdividido en intervalos de amplitud de $\frac{1}{2}$ min. Calculan las frecuencias relativas por amplitud del intervalo (amplitud $\frac{1}{2}$). Completan la tabla 2.

Tabla 2

Intervalo de amplitud $\frac{1}{2}$ min	Número de llegadas de un total de 1 000 personas	Frecuencia relativa por intervalo de amplitud $\frac{1}{2}$
$\left]0,\frac{1}{2}\right]$	18	0,036
$\left]\frac{1}{2},1\right]$	12	
$\left]1,1\frac{1}{2}\right]$	9	
$\left]1\frac{1}{2},2\right]$	11	
$\left]2,2\frac{1}{2}\right]$	19	
$\left]2\frac{1}{2},3\right]$	21	
$\left]3,3\frac{1}{2}\right]$	37	
$\left]3\frac{1}{2},4\right]$	33	
$\left]4,4\frac{1}{2}\right]$	38	
$\left]4\frac{1}{2},5\right]$	42	
$\left]5,5\frac{1}{2}\right]$	45	
$\left]5\frac{1}{2},6\right]$	55	
$\left]6,6\frac{1}{2}\right]$	63	
$\left]6\frac{1}{2},7\right]$	77	
$\left]7,7\frac{1}{2}\right]$	79	
$\left]7\frac{1}{2},8\right]$	81	

$\left]8,8\frac{1}{2}\right]$	83	
$\left]8\frac{1}{2},9\right]$	87	
$\left]9,9\frac{1}{2}\right]$	92	
$\left]9\frac{1}{2},10\right]$	98	

f. En los gráficos 2.1 y 2.2 se representan los datos de la tabla 2. Comparan los gráficos 2.1 y 2.2 con los gráficos 1.1 y 1.2 y explican en qué se diferencian y qué tienen en común.

g. Conjeturan acerca de la suma de todas las áreas de las barras del gráfico 2.1.

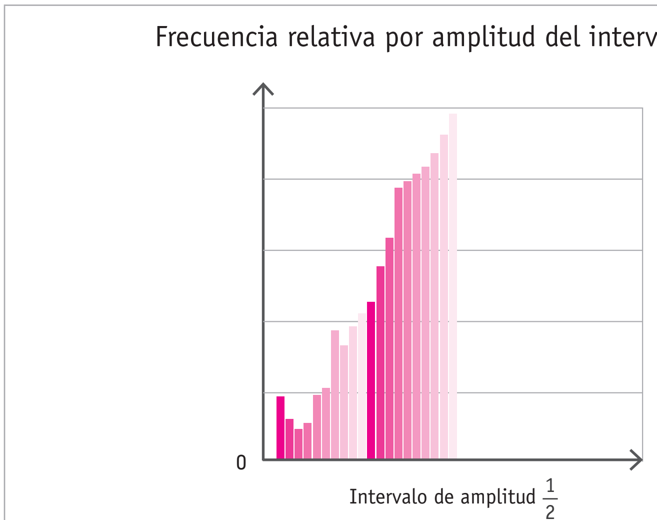


Gráfico 2.1

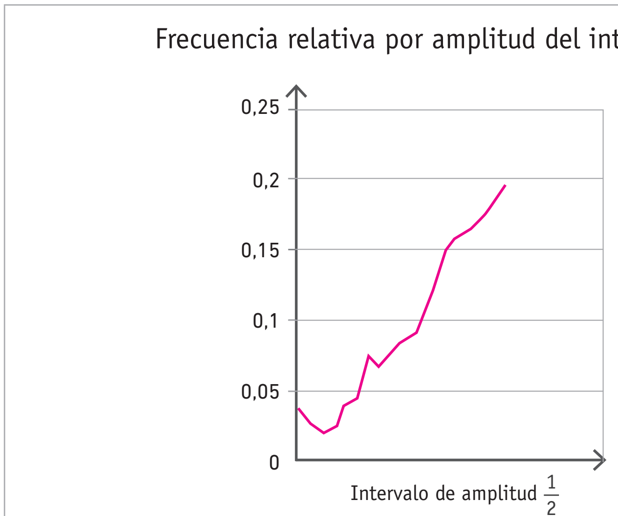


Gráfico 2.2

Observaciones a la o el docente

Antes de comenzar con la actividad 2, es importante que la o el docente destaque que se cambian las frecuencias relativas por amplitud de intervalo, las cuales corresponden a una variable aleatoria cuyas probabilidades también se determinan en función de la amplitud de intervalo. En esta actividad en particular, el foco no está en realizar cálculos, sino que en potenciar el razonamiento matemático en función de lo desarrollado en la actividad 1. Se recomienda el trabajo en grupo para argumentar y comunicar las conjeturas y las respuestas en el plenario.

2. Se les presenta el siguiente problema y realizan las actividades:

Aunque la llegada de una gran cantidad de personas a un evento de masiva afluencia siga una cierta tendencia, la llegada individual de las personas se puede interpretar como un proceso aleatorio. Se define una variable aleatoria continua X que representa la llegada de personas a un evento y se considera la siguiente situación: A 30 minutos del inicio del evento y con más puertas abiertas, se registra la llegada de 10 000 personas en 40 intervalos de $\frac{1}{4}$ minuto.

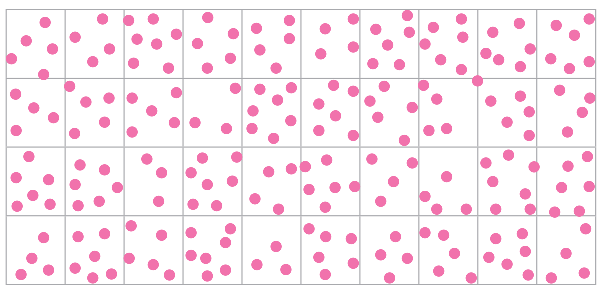
a. Conjeturan acerca de los cambios que se generarían en los gráficos 2.1 y 2.2 representados en la actividad anterior.
b. Responden: Si se sigue aumentando el número de la llegada de las personas y, a la vez, disminuyendo las amplitudes de los intervalos, ¿por qué la frecuencia relativa por amplitud del intervalo no experimentará grandes cambios? Explican la respuesta con los resultados de la actividad.
c. Contestan: Si en vez de registrar las personas que llegan al evento, se considera una variable aleatoria X que representa la llegada de personas, ¿en qué término se convierte la frecuencia relativa por amplitud del intervalo (altura de las barras en el gráfico)?
d. Explican qué representan las áreas de las barras del gráfico.
e. Responden: Si se considera un aumento infinito de llegadas y una disminución infinita de las amplitudes de los intervalos, ¿en qué gráfico se convierte el gráfico de líneas (del tipo 1.2 y 2.2)?, ¿cómo se puede interpretar el área bajo la curva en el gráfico entre las dos rectas $X = x_1$ y $X = x_2$ y el eje X?

3. Se les plantea la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

En Rancagua comienza a llover de forma dispersa, pero con constante intensidad, como muestra la figura 1. Específicamente, esta figura muestra el techo acrílico de un invernadero con 20 gotas de lluvia repartidas al azar en 20 cuadrículas de igual tamaño. Momentos más tarde, han caído al techo 200 gotas de lluvia, las que se registran en 40 cuadrículas, como muestra la figura 2 (cada cuadrícula de la figura 2 tiene la mitad del área que las cuadrículas de la figura 1). Las 20 cuadrículas de la figura 1 están marcadas del 1 a 20, según el siguiente esquema: la última fila se enumera del 1 a 5 de izquierda a derecha, la penúltima fila, de 6 a 10 de izquierda a derecha, y así sucesivamente hasta enumerar la cuadrícula número 20. En la figura 2 se enumeran las 40 cuadrículas de la misma manera que las cuadrículas de la figura 1.

20 gotas de lluvia registradas en un techo de 20 cuadriculas.

Figura 1



200 gotas de lluvia registradas en el techo de 40 cuadriculas de la mitad del tamaño anterior.

Figura 2

a. Se consideran las primeras 20 gotas que han caído en el techo (representado en la figura 1). Determinan las frecuencias relativas por unidad del área de las cuadrículas (unidad 1) y completan la tabla 1.

Tabla 1

Cuadrícula	1	2	3	4	5
Frecuencia relativa por unidad 1 del área	$\frac{1}{20} : 1 = 0{,}05$				
Cuadrícula	6	7	8	9	10
Frecuencia relativa por unidad 1 del área					
Cuadrícula	11	12	13	14	15
Frecuencia relativa por unidad 1 del área					
Cuadrícula	16	17	18	19	20
Frecuencia relativa por unidad 1 del área					

b. Ahora se consideran las primeras 200 gotas que han caído en el techo registradas en cuadrículas cuyo tamaño es la mitad de la unidad anterior. Determinan las frecuencias relativas por unidad del área de las cuadrículas (unidad $\frac{1}{2}$) y completan la tabla 2.

Tabla 2

Cuadrícula	1	2	3	4	5
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área	$\frac{4}{200} : \frac{1}{2} = 0{,}04$	0,05			
Cuadrícula	6	7	8	9	10
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	11	12	13	14	15
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					

Cuadrícula	16	17	18	19	20
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	21	22	23	24	25
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	26	27	28	29	30
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	31	32	33	34	35
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					
Cuadrícula	36	37	38	39	40
Frecuencia relativa por unidad $\frac{1}{2}$ del área					

c. El gráfico 1 permite analizar los datos de las frecuencias relativas de las primeras 20 gotas de lluvia que, en este caso particular, muestra la probabilidad por unidad del área de las cuadrículas. Interpretan el gráfico.

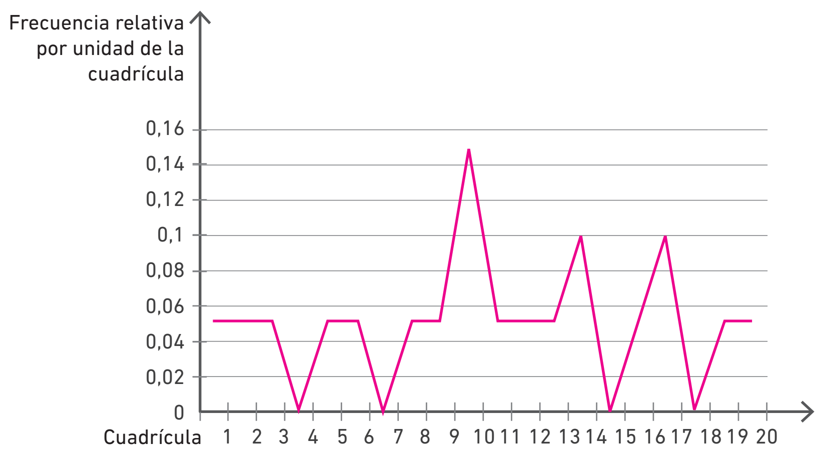


Gráfico 1

d. Comparan la figura 1 con el gráfico 1 e interpretan los valores 0 y 0,14 según el contexto del problema.

e. Responden: ¿Qué cambio experimentará el gráfico 1 si es elaborado basándose en la figura 2 y con los datos de la tabla 2? Razonan y explican su respuesta.

f. Elaboran, mediante Excel, el gráfico de líneas que representa la figura 2 y la tabla 2. Verifican la respuesta de la actividad anterior.

g. Contestan: Si, en vez de registrar las frecuencias relativas, se considera una variable aleatoria X que representa la caída de las gotas en el techo, ¿en qué término se convierte la frecuencia relativa por unidad de la cuadrícula? Razonan y explican su respuesta.

h. Responden: Si se aumentara infinitamente la cantidad de las gotas y, a la vez, se disminuyera infinitamente el área en la cual se registran las gotas de lluvia, ¿qué forma tomaría el gráfico de líneas? Explican su respuesta.

4. Se les entrega la siguiente información y realizan las actividades:

En un paradero pasan buses cada 20 minutos. Se registra el tiempo de espera de una persona que llega al paradero y aguarda el siguiente bus.

a. Justifican la probabilidad de que el tiempo de espera en un intervalo sea igual a:

$$P(a < X < b) = (b - a) \cdot \frac{1}{20}$$

b. Relacionan la determinación del área de un rectángulo de lados $(b - a)$ y $\frac{1}{20}$ con el cálculo de la probabilidad del tiempo de espera en el intervalo $[a, b]$.

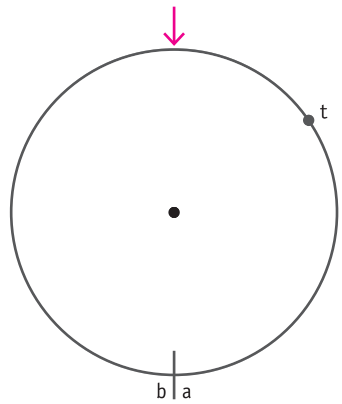
c. Justifican la probabilidad de que la variable tiempo de espera corresponda al área bajo la curva $y = \frac{1}{20}$.

Observaciones a la o el docente

Es importante que las y los estudiantes comprendan que el área bajo la función de densidad de una variable aleatoria continua corresponde a la probabilidad de la variable. Para esto es necesario que identifiquen la función de distribución de probabilidad, determinen la función de densidad media en el intervalo [a, b] $\frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ y la relacionen con la función de densidad.

5. Se les plantea la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

Sea un disco graduado entre dos valores a y b, tal que $a < b$, que se hace girar en presencia de una pestaña que permanece inmóvil.



a. Conjeturan si la probabilidad de que, al parar el disco, la pestaña marque un valor entre a y t es igual a $P(x \leq t) = \frac{t - a}{b - a}$.

b. Comparan la probabilidad dada en a con la función de distribución de la probabilidad $F(x \leq t) = \frac{t - a}{b - a}$, $\forall\ a \leq t \leq b$.

c. Calculan la función de densidad media y conjeturan si la función de densidad es igual a $f(t) = \frac{1}{b - a}$, $\forall\ a \leq t \leq b$.

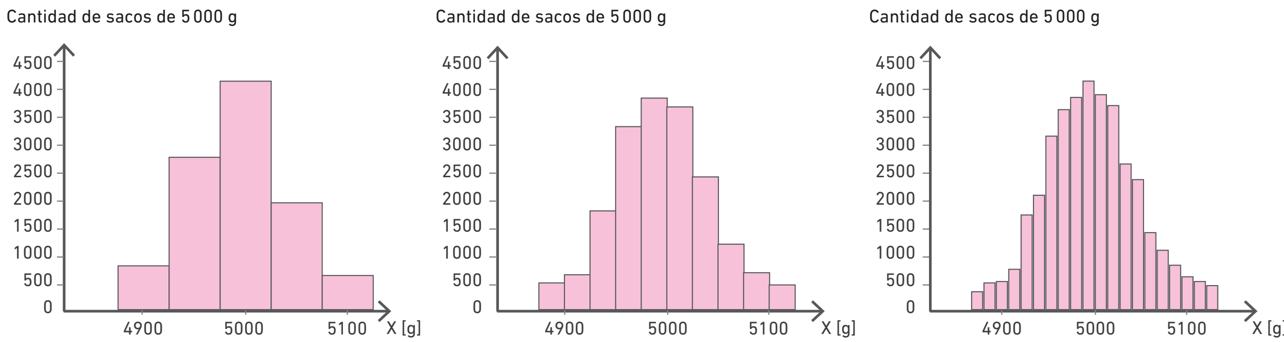
EJEMPLO DE EVALUACIÓN

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
AE 09 Interpretar el concepto de variable aleatoria continua.	› Determinan en ejemplos concretos si una variable aleatoria es discreta o continua. › Analizan en gráficos o tablas empíricas las distribuciones de frecuencias relativas de datos estadísticos, como peso, estatura, edad, presión sanguínea, etc.

ACTIVIDAD PROPUESTA

Lea el siguiente problema y observe los gráficos:

En una fábrica de alimentos de perros, una máquina de empaque está programada para llenar sacos de 5 000 g.



A continuación, lleve a cabo las siguientes actividades:

a. Estime, mediante los datos del primer gráfico, las frecuencias relativas de los contenidos para los intervalos de la amplitud 1 (correspondiente a 50 g):]4 875, 4 925],]4 925, 4 975],]4 975, 5 025],]5 025, 5 075] y]5 075; 5 125].

b. En el segundo gráfico se reduce la amplitud de los intervalos a $\frac{1}{2}$ y la escala en el eje vertical se reduce también a la mitad. Describa y explique los cambios que se generan en el gráfico.

c. En el tercer gráfico se reduce la amplitud de los intervalos a $\frac{1}{4}$ de la amplitud del primer gráfico y la escala del eje vertical también se reduce a un cuarto. Describa y explique los cambios que se generan en el gráfico.

d. Marque en los tres gráficos los puntos medios de los anchos superiores de las barras y complete el gráfico de segmentos juntando los puntos medios.

e. Describa el desarrollo de los gráficos de segmentos.

f. En vez de registrar las frecuencias relativas, se considera una variable aleatoria X que representa el contenido de un saco sorteado al azar. La variable X puede tomar cualquier valor alrededor de 5 000 g. Responda: ¿Qué representan las ordenadas de los puntos del gráfico que se desarrolla?

g. Responda: ¿Qué representa el área debajo de la curva entre dos rectas $X = a$ y $X = b$?

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al evaluar, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- Lee los datos y calcula frecuencias relativas relacionadas con los intervalos del primer gráfico.
- Explica que las frecuencias relativas por amplitud del intervalo se mantienen casi estables.
- Elabora el gráfico de segmentos según las indicaciones del ejercicio.
- Explica que, con los cambios realizados, los gráficos de segmentos se aproximan más y más a una curva más lisa.
- Explica que las ordenadas de los puntos del gráfico que se desarrolla representan la densidad de probabilidad con la cual se puede determinar las probabilidades relacionadas con intervalos.
- Menciona que el área debajo de la curva entre las rectas $X = a$ y $X = b$ representa la probabilidad relacionada con el intervalo respectivo.

UNIDAD 4
DATOS Y AZAR 2

PROPÓSITO

En esta unidad, las y los estudiantes verifican gráficamente el proceso de desarrollo de una distribución binomial a una distribución normal. Este desarrollo incluye la comprensión de la aproximación de un área bajo la curva, entre el eje X y dos segmentos paralelos al eje Y, que significa un procedimiento preliminar al desarrollo de "la integral definida" de una función que es parte de estudios de la enseñanza superior.

Aplican la distribución normal para modelar situaciones de la vida diaria o de ciencias. Reconocen en forma intuitiva la validez del "teorema central del límite" y emplean estimaciones de medias poblacionales mediante la construcción de intervalos de confianza aumentando el tamaño de las muestras extraídas. Deciden a nivel escolar entre modelos probabilísticos para resolver problemas estadísticos que significa un procedimiento de alta importancia en los estudios superiores y en la vida profesional.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Distribución binomial, valor esperado, varianza, desviación estándar, variable aleatoria continua, distribución de probabilidad de una variable aleatoria, función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria.

CONCEPTOS CLAVE

Campana de Gauss, distribución normal, valor esperado, desviación estándar, función Φ de distribución acumulada, media poblacional, media muestral, intervalos de confianza.

CONTENIDOS

- Distribución normal.
- Función Φ de distribución acumulada.
- Estimación de medias poblacionales.
- Construcción de intervalos de confianza.

HABILIDADES

- Analizar distribuciones de medias muestrales.
- Modelar situaciones estadísticas mediante la distribución normal.
- Conjeturar acerca de universalidad de la distribución normal.
- Resolver problemas de la vida diaria mediante herramientas estadísticas

ACTITUDES

- Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.
- Comprender y valorar la perseverancia, el rigor, el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad al resolver problemas matemáticos.

APRENDIZAJES ESPERADOS E INDICADORES DE EVALUACIÓN DE LA UNIDAD

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Los y las estudiantes que han logrado este aprendizaje:*
AE 11 Aproximar, a partir de histogramas de distribuciones binomiales, el gráfico de la campana de Gauss.	› Elaboran, con herramientas tecnológicas, una secuencia de histogramas de distribuciones binomiales con la probabilidad p constante aumentando el valor n de las repeticiones. › Describen el efecto que tiene el aumento de n de las repeticiones en la forma y en la posición de los histogramas. › Estandarizan los histogramas con $\overline{\mu} = 0$; $\overline{x} = \frac{1}{\sigma} \cdot x$; $\overline{y} = \sigma \cdot y$. › Aproximan, de forma intuitiva, la curva que une las cimas, lo que da como resultado una campana denominada "campana de Gauss estandarizada". › Reconocen la campana de Gauss como gráfico de función de densidad de una variable aleatoria continua. › Determinan aproximadamente probabilidades sobre intervalos, mediante la campana de Gauss.
AE 12 Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.	› Verifican mediante varios ejemplos, utilizando herramientas técnicas de simulación o de cálculo, que una distribución normal se define por el valor esperado μ y la desviación estándar σ. › Reconocen el significado de la función Φ estandarizada de distribución acumulada. › Utilizan calculadora o tablas de la función Φ de distribución acumulada para determinar probabilidades relacionadas con intervalos. › Determinan, para un dato de una muestra aleatoria de población normal, la ubicación de este en los intervalos $[\mu - \sigma , \mu + \sigma]$, $[\mu - 2\sigma , \mu + 2\sigma]$, $[\mu - 3\sigma , \mu + 3\sigma]$.
AE 13 Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados.	› Verifican en ejemplos concretos que la distribución de las medias $\overline{X}$ de una distribución normal con el valor esperado μ y la desviación estándar σ tiene los siguientes parámetros: $\overline{\mu} = \mu$ y $\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. › Sacan una muestra del tamaño n, determinan la media $\overline{X}$ y construyen un intervalo de confianza con un nivel de confianza dado utilizando la desviación estándar $\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. › Resuelven problemas de la vida diaria que involucran la estimación de la media $\overline{X}$ de una población.

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
Se espera que los y las estudiantes sean capaces de:	*Los y las estudiantes que han logrado este aprendizaje:*
AE 14 Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\overline{X}$ de muestras aleatorias del tamaño n, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra.	› Conjeturan, basándose en histogramas de ejemplos concretos y de forma intuitiva, sobre la validez del teorema del límite central. › Determinan para muestras aleatorias no binomiales ni normales: - la media poblacional μ, - la desviación estándar poblacional σ, - la media de la distribución de medias aritméticas $\overline{\mu}$, - la desviación estándar de la distribución de medias aritméticas $\overline{\sigma}$. › Elaboran histogramas de la distribución de la media aritmética $\overline{X}$ de una variable aleatoria X aumentando el tamaño n. › Reconocen que en los histogramas la distribución de las medias $\overline{X}$ se aproxima a una campana de Gauss. › Determinan, a partir de μ y σ de la distribución poblacional junto con el tamaño n de la muestra de las medias $\overline{X}$, los parámetros de la distribución normal con los cuales se aproxima la distribución poblacional.
AE 15 Modelar situaciones de la vida diaria o de las ciencias naturales con distribuciones aleatorias, como la distribución binomial o la distribución normal.	› Utilizan la distribución normal como modelo para distribuciones que se componen en forma aditiva de numerosos eventos aleatorios. › Conjeturan el modelo de distribución pertinente para determinados tipos de situaciones. › Consideran las condiciones y las restricciones para aplicar un modelo probabilístico.

OFT	APRENDIZAJES ESPERADOS EN RELACIÓN CON LOS OFT

› Desarrollar el interés por conocer la realidad y utilizar el conocimiento.

› Comprender y valorar la perseverancia, el rigor y el cumplimiento, la flexibilidad y la originalidad.

ORIENTACIONES DIDÁCTICAS PARA LA UNIDAD

En esta unidad es importante que los y las estudiantes comprendan que la distribución normal es un tipo de modelamiento que permite representar, en forma aproximada, algunas distribuciones de variables aleatorias continuas. Así, se espera que entiendan que, al considerar en una población una variable continua o con un número grande de valores, a veces ocurre que la distribución es simétrica respecto de su valor medio, que la mayor parte de valores se concentra alrededor de la media, y que los valores tienen menor probabilidad cuanto más se alejen de la media. Además, se busca que reconozcan que, a partir del valor central, la distribución de valores decrece hacia los extremos hasta que la gráfica se aproxima al eje horizontal. Al mismo tiempo, se pretende que comprendan que la variable aleatoria continua cuya función de densidad es la función de densidad normal se conoce como distribución normal.

Para que las y los estudiantes reconozcan que la distribución normal permite resolver problemas estadísticos de la vida diaria o de ciencias, se sugiere a la o el docente contextualizar con problemas reales en distintos campos, por ejemplo, con problemas biológicos de distribución de la tallas, pesos y otras medidas físicas de un conjunto numeroso de personas de una determinada edad; datos psicológicos de tiempo de reacción, puntuaciones en un examen o test, amplitud de percepción; problemas físicos de distribución de los errores de observación o medida que aparecen en los estudios acerca de fenómenos meteorológicos, físicos, astronómicos, entre otros; datos económicos de fluctuaciones de precios; y problemas técnicos de distribución de las medidas de piezas manufacturadas.

En el caso de distribuciones normales o no normales, es necesario que el o la docente muestre concretamente que se pueden estimar parámetros de distribuciones, como la media y la desviación estándar, construyendo intervalos de confianza según los niveles de confianza requeridos. Además de aplicar modelos binomiales o normales dados, se sugiere que los y las estudiantes elijan entre los modelos propuestos y que conjeturen acerca de la validez o de las restricciones de estos para resolver un problema dado. Al mismo tiempo, se recomienda darles la oportunidad de analizar o inferir las siguientes propiedades de la distribución normal estándar: el área total bajo la curva normal es igual a 1; la distribución tiene forma de campana y es simétrica; la distribución tiene una media igual a 0 y una desviación estándar igual a 1, entre otras.

Al igual que en la unidad 3, se aconseja a la o el docente monitorear el logro de los aprendizajes a medida que avanza la unidad y no solamente al final de ella. De este modo, sabrá si las y los estudiantes comprenden y aplican los conceptos y procedimientos al resolver problemas de distribución normal, medias poblacionales e intervalos de confianza. Así, el o la docente podrá obtener evidencia de aprendizaje de los distintos niveles de desempeño y diseñar procesos de retroalimentación para las diferentes dificultades o errores conceptuales/procedimentales propios de los contenidos que se trabajan en esta unidad.

SUGERENCIAS DE ACTIVIDADES

Las sugerencias de actividades presentadas a continuación pueden ser seleccionadas, adaptadas y/o complementadas por la o el docente para su desarrollo, de acuerdo a su contexto escolar.

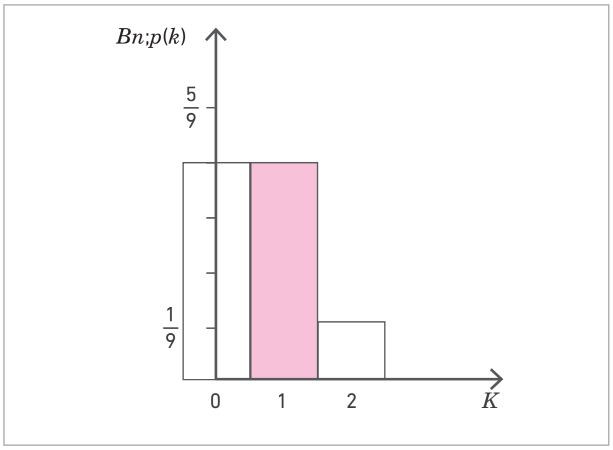
AE 11 Aproximar, a partir de histogramas de distribuciones binomiales, el gráfico de la campana de Gauss.

Observaciones a la o el docente

En las siguientes actividades se pueden utilizar herramientas tecnológicas de cálculo para determinar las probabilidades $Bn;p(k) = \left[\frac{n}{k}\right] \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$ de distribuciones binomiales con n, k y p dado. En el símbolo $Bn;k$ la B representa el término Binomial; la n, las repeticiones del experimento Bernoulli; y la k, la probabilidad de éxito. Con cualquier buscador en internet se pueden encontrar sitios que ofrecen gratuitamente el uso de calculadoras o simuladores, como por ejemplo: www.ugr.es/~jsalinas/herramar.htm, www.virtual.uptc.edu.co, www.es.easycalculation.com/statistics/binomial-distribution.php, www.edumat.net, www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomial.html, etc. También se pueden utilizar los programas Excel, Winstats o Geogebra con los "macros" estadísticos.

A continuación se muestra el proceso de la estandarización de una distribución binomial $Bn;p(k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, con los valores de $n = 2$, $p = \frac{1}{3}$ y $k = 0, 1, 2$, representada por la tabla y el histograma respectivo.

k	0	1	2
$Bn;p(k)$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$



Valor esperado: $\mu = n \cdot p = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}}$

Con el número n creciente, los histogramas de una distribución binomial se desplazan hacia la derecha y las alturas de la cimas se reducen. Para revertir estos cambios se realizan las siguientes transformaciones:

› Traslación del histograma por el valor esperado μ hacia el origen del sistema de coordenadas.

› Reducción de los anchos de las barras por el factor $\frac{1}{\sigma}$.

› Estrechamiento de las alturas de las barras por el factor σ.

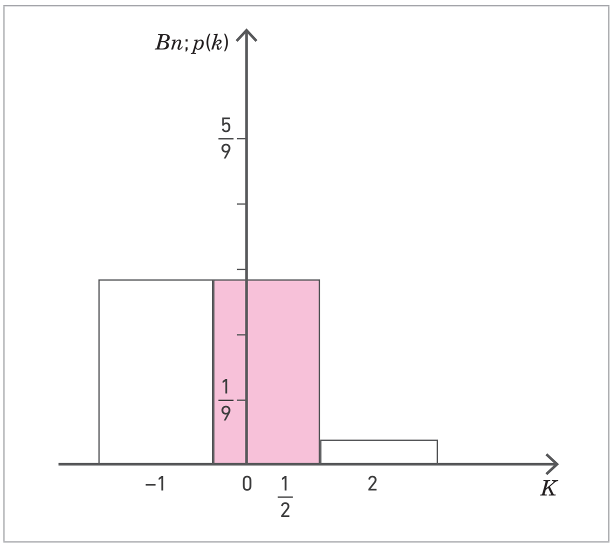
Con estos cambios resulta una variable aleatoria estandarizada $T = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Tabla de valores de la variable aleatoria estandarizada:

x	T
0	-1
1	$\frac{1}{2}$
2	2

Ancho	Ancho nuevo	Altura	Altura nueva d
1	$1 : \frac{2}{3} = 1,5$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
1	$1 : \frac{2}{3} = 1,5$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$
1	$1 : \frac{2}{3} = 1,5$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$

Histograma estandarizado:



1. Se les plantea la siguiente situación y realizan las actividades:

En un experimento del tipo Bernoulli, la probabilidad de éxito es de $p = \frac{1}{3}$. Se repite el experimento n veces.

a. Calculan para $n = 8$ los valores de $Bn;p(k) = \left[\frac{n}{k}\right] \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$, utilizando una tabla de distribución binomial o la calculadora. Completan la tabla a continuación y elaboran, en un sistema de coordenadas, el histograma de la distribución binomial.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$Bn;p(k)$	0,0390								

b. Determinan el valor esperado μ y la desviación estándar σ.

c. Estandarizan el histograma mediante las siguientes transformaciones:
   - Traslación del histograma por el valor esperado μ hacia el origen del sistema de coordenadas.
   - Reducción de los anchos de las barras por el factor $\frac{1}{\sigma}$.
   - Estrechamiento de las alturas de las barras por el factor σ.

d. Determinan, mediante el histograma, las probabilidades representadas por las tres barras centrales.

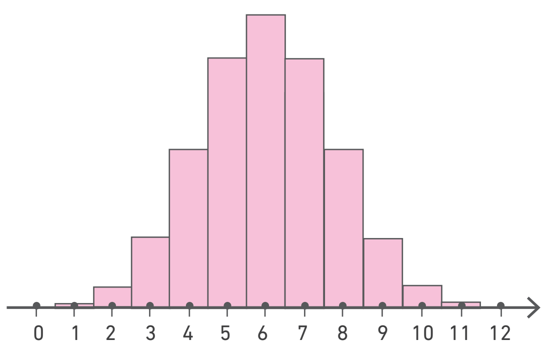
2. Elaboran una secuencia de histogramas de distribuciones binomiales con herramientas tecnológicas de cálculo, como Excel, Geogebra, Winstats, o un simulador disponible gratuitamente en el siguiente link: www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomial.html. En esta actividad:

   a. Realizan simulaciones de histogramas del valor $p = 0{,}5$ y aumentan el número de repeticiones de $n = 5$, 10, 15 y 20.

   b. Describen el cambio que se genera en los histogramas si se aumenta el número n.

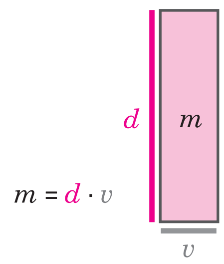
   c. Imprimen los histogramas estandarizados y dibujan en forma intuitiva la curva que representa la función de densidad de probabilidad.

   d. Realizan, mediante el simulador, la aproximación de los histogramas y la comparan con el dibujo intuitivo.

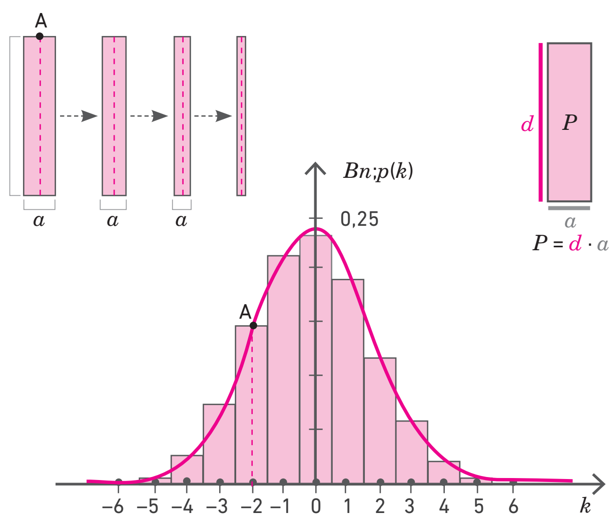


Observaciones a la o el docente

Para que los y las estudiantes puedan comprender el concepto de densidad de probabilidad, se recomienda a la o el docente que utilice la metáfora de la densidad de masa:
Si en un cuerpo la densidad de masa es alta, tiene una cantidad grande de masa en un volumen de referencia. Sabiendo la densidad d, la masa m se puede calcular mediante el producto con el volumen V. Este producto es representable por el área de un rectángulo.

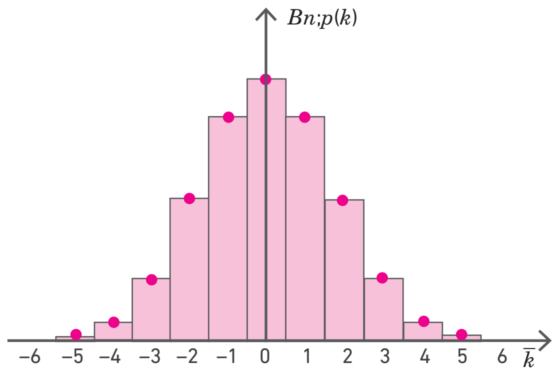


En histogramas de distribuciones de probabilidad, como la distribución binomial, la probabilidad relacionada con intervalos también se representa mediante un área, que es el área de la barra sobre el intervalo respectivo. La altura de la barra representa la densidad de la probabilidad **d** en referencia al ancho **a** del intervalo. Como en la metáfora de la densidad de una masa, se calcula la probabilidad sobre el intervalo mediante el producto de $P = d \cdot a$. En el proceso de aproximación del histograma por una curva, se disminuye el ancho de las barras y la altura de la barra se convierte en la ordenada del punto A, que pertenece a la curva de aproximación “campana de Gauss”.



2
U4

3. Se les muestra el siguiente dibujo, el cual representa el histograma estandarizado de una distribución binomial con n = 10 y p = 0,5.



A continuación:

a. Determinan el valor esperado μ y la desviación estándar σ de la distribución binomial.

b. Transforman los valores estandarizados de $\overline{k}$ = −5; −4; …; 4; 5 en los valores de k antes de la estandarización. Completan la tabla.

$\overline{k}$	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
k											

c. Determinan, mediante una tabla o una calculadora, los valores de $Bn;k$. Completan la tabla.

$\overline{k}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Bn;k$											

d. Calculan la suma de todas las probabilidades representadas por las barras del histograma, considerando que los anchos de los intervalos tienen el valor a = 1.

e. Dibujan en forma intuitiva la curva que une los puntos rojos marcados en el histograma.

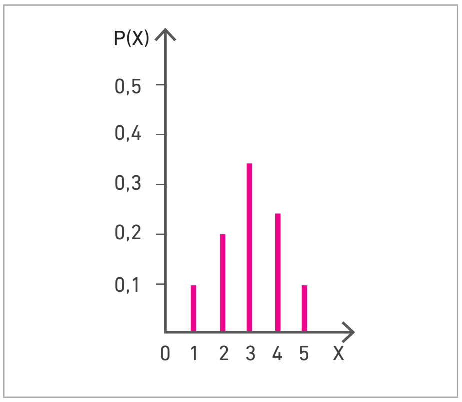
f. Conjeturan acerca del contenido del área debajo de la curva de aproximación. Explican y comunican sus conjeturas.

Observaciones a la o el docente

Para representar distribuciones de variables aleatorias se recomienda un gráfico con barras delgadas, en el cual las barras se reducen a un segmento paralelo al eje $P(X)$.

Ejemplo:

X	1	2	3	4	5
$P(X)$	0,1	0,2	0,35	0,25	0,1



AE 12 Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.

1. Utilizan un programa gratuito de simulación de distribuciones normales disponible en internet, como http://tube.geogebra.org/student/mdqgPNtOL, para verificar los cambios que se generan si se varían los parámetros de μ y σ. En esta actividad:
   a. Representan la distribución normal de referencia con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$.
   b. Manteniendo la desviación estándar, varían el valor esperado en el intervalo $[-2; 2]$. Describen y comentan el cambio del gráfico.
   c. Manteniendo el valor esperado de $\mu = 0$, varían la desviación estándar σ. Describen y comentan el cambio del gráfico.
   d. Manteniendo el valor esperado de $\mu = 0$ y la desviación estándar $\sigma = 1$, determinan las probabilidades de $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$, $P(\mu - 2\,\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$, $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$ y las expresan en porcentajes.
   e. Repiten la actividad *d* con el mismo valor esperado de $\mu = 0$ y otra desviación estándar, por ejemplo, $\sigma = 0,5$. Comparan y comentan el resultado con el anterior.

2. Se les plantea la siguiente situación y llevan a cabo las actividades:

En una granja avícola se producen huevos de calidad con el sello "producto biológico". El peso de los huevos se distribuye según una distribución normal con el valor esperado de $\mu = 56$ g y la desviación estándar de $\sigma = 8$. Se calcula la ganancia por huevo según las siguientes clases de peso.

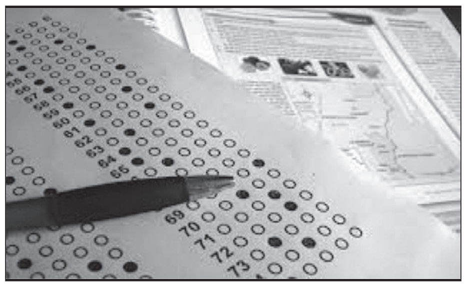
Peso en g	< 4	[40;45[	[45;50[	[50;55[	[55;60[	≥ 60
Ganancia en $	−10	20	30	50	70	80

a. Determinan, mediante la tabla de la función Φ de distribución acumulada o con herramientas tecnológicas, las probabilidades que corresponden a las clases de peso.

b. Calculan la ganancia esperada por huevo.

3. Se les presenta el siguiente problema y realizan las actividades:

Se quiere modelar una prueba Simce mediante una distribución normal con el valor esperado de $\mu = 250$ puntos y la desviación estándar $\sigma = 50$ puntos. Se elige un alumno al azar.



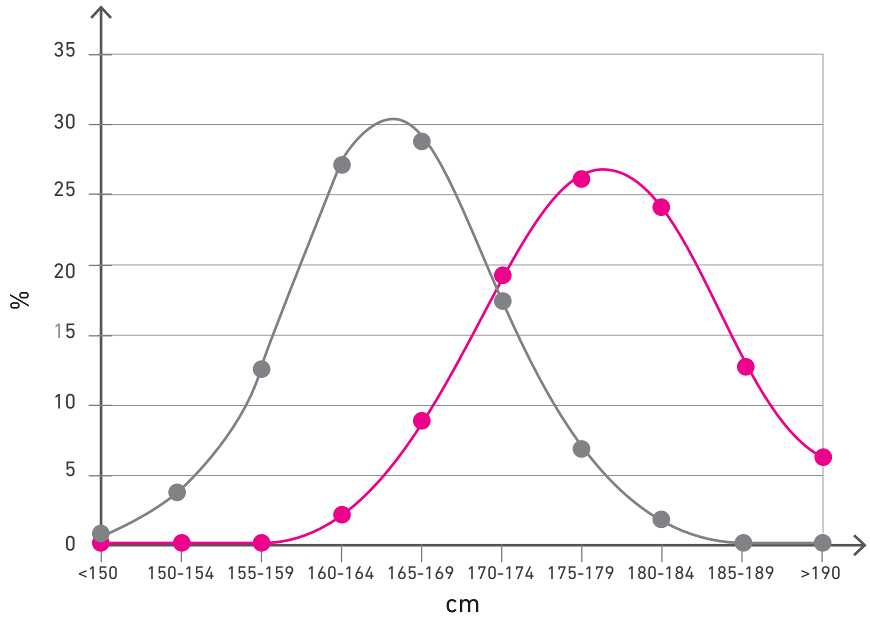
a. Responden: ¿Cuán probable es que el alumno obtenga un puntaje inferior a 200 puntos?

b. ¿Cuán probable es que el alumno obtenga un puntaje superior a 350 puntos?

c. Determinan la probabilidad de que el rendimiento del alumno pertenezca al intervalo de $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$.

4. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

De acuerdo con el gráfico, se puede considerar que la estatura de una población se distribuye según una distribución normal. Este gráfico además representa que, en un determinado país, la estatura media de los hombres entre 18 y 20 años se estima en 180 cm, con una desviación estándar de 7,4 cm. Los datos corresponden a la curva roja.

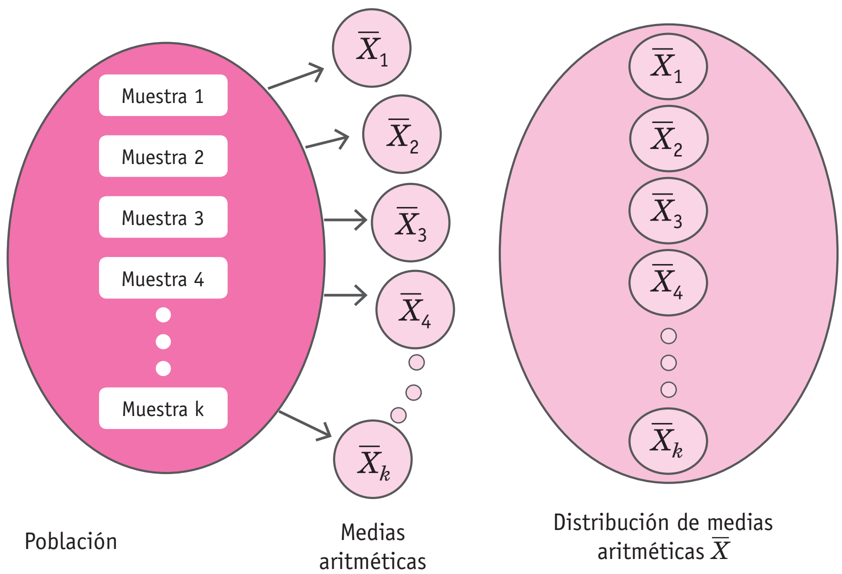


a. Conjeturan acerca del tipo de distribución y sobre la confiabilidad de la estatura media de 180 cm mencionada.
b. Responden: ¿Con qué probabilidad un hombre, elegido al azar, tiene una altura mayor a 185 cm?
c. Contestan: ¿Con qué probabilidad un hombre, elegido al azar, tiene una altura entre 170 cm y 180 cm?
d. Determinan en qué intervalo simétrico a la estatura media se ubican las estaturas de 50% de todos los hombres.
e. Indican la estatura mínima que debe tener un hombre para pertenecer al grupo del 5% con máxima estatura.

AE 13	Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados.

Observaciones a la o el docente

Se recomienda a la o el docente representar la distribución muestral de medias aritméticas mediante una representación esquemática, como se muestra en el siguiente dibujo.



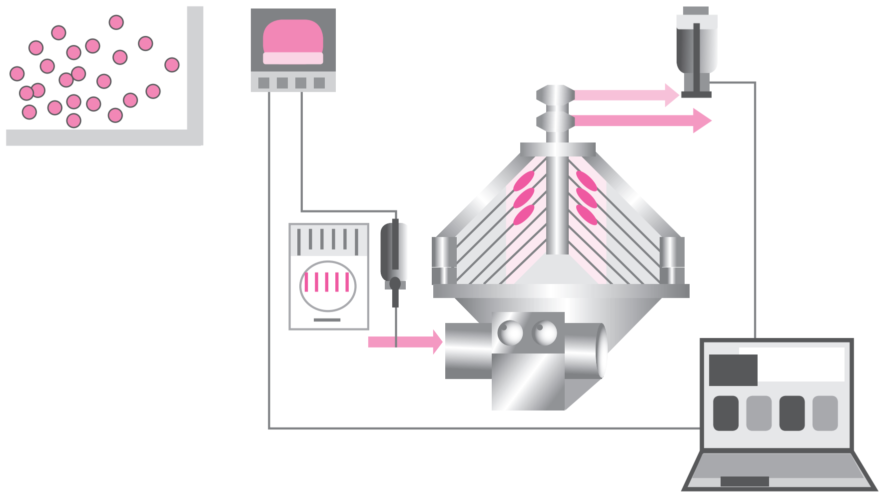
Para la elaboración de un intervalo de confianza, se sugiere a el o la docente utilizar la siguiente tabla, cuyos valores se calcularon con la tabla de la función Φ estandarizada de distribución normal acumulada.

Nivel de confianza de la estimación de la media en %	Factor k de confianza para construir los límites del intervalo	Límites del intervalo de confianza
90%	1,645	$\overline{X} \pm 1{,}645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
95%	1,960	$\overline{X} \pm 1{,}960 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
99%	2,576	$\overline{X} \pm 1{,}576 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para otros niveles de confianza se deben determinar los factores de confianza mediante la tabla de la función Φ estandarizada de distribución normal acumulada.

1. Se les plantea la siguiente situación y realizan las actividades:

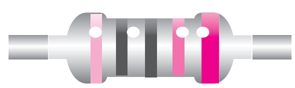
En un instituto de control de nutrición se determina el porcentaje de grasa en la leche. Según los datos del productor, se puede contar con una desviación estándar de $\sigma = 1{,}5\%$. De la producción, se sacó al azar una muestra de 25 cajas, cuyo porcentaje de grasa se calculó en 12,5%. Se considera que la producción de leche se distribuya, aproximadamente, mediante una distribución normal.



a. Elaboran, con un nivel de confianza de 90%, un intervalo de confianza alrededor de la media de la muestra $\overline{X}$ que incluya el verdadero valor esperado μ de la producción.
b. Conjeturan acerca del intervalo de confianza de la estimación si se aumenta el tamaño de la prueba manteniendo el nivel de confianza.

2. Se les presenta el siguiente problema y llevan a cabo las actividades:

Una empresa produce resistencias eléctricas de 200 Ω con una desviación estándar de 10 Ω. Si se cambia la máquina de producción, se sabe que se puede contar con una distribución normal y una desviación estándar nueva de $\sigma = 5\ \Omega$. Para estimar el verdadero valor esperado μ de la producción, se toma una muestra del tamaño 100 cuya media $\overline{X}$ se determinó en 202 Ω.



a. Elaboran, con los datos de la muestra, el intervalo de confianza de un nivel de 95% de confianza que incluye el verdadero valor esperado μ de la producción.
b. Conjeturan acerca del ancho del intervalo si se aumenta o si se baja el nivel de confianza.

3. Se les plantea la siguiente situación y realizan las actividades:

Una población se distribuye según una distribución normal con una desviación estándar $\sigma = 120$. Para elaborar intervalos de confianza alrededor de una estimación de la media $\overline{X}$ que incluyen con un nivel de confianza de 95% el verdadero valor esperado μ, se sacan muestras de los tamaños $n = 4, 9, 16, 25, 36, 64, 100$ y 144.

a. Determinan los anchos de los intervalos de confianza en dependencia del tamaño n. Redondean a la décima y completan la tabla.

Tamaño n	4	9	16	25	36	64	100	144
Ancho $d(n)$	235,2							

b. Elaboran el gráfico $d(n)$ que representa el ancho del intervalo d en dependencia del tamaño n de la muestra.

c. Determinan aproximadamente, mediante el gráfico, el tamaño mínimo de una muestra si el intervalo debe tener un ancho máximo de 60.

AE 14 Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\overline{X}$ de muestras aleatorias del tamaño n, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra.

1. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

Se lanzan a la vez un dado, dos dados, tres dados, etc. y se anota la suma de los números caídos. En el caso de un solo lanzamiento, se considera el número caído también como una suma.

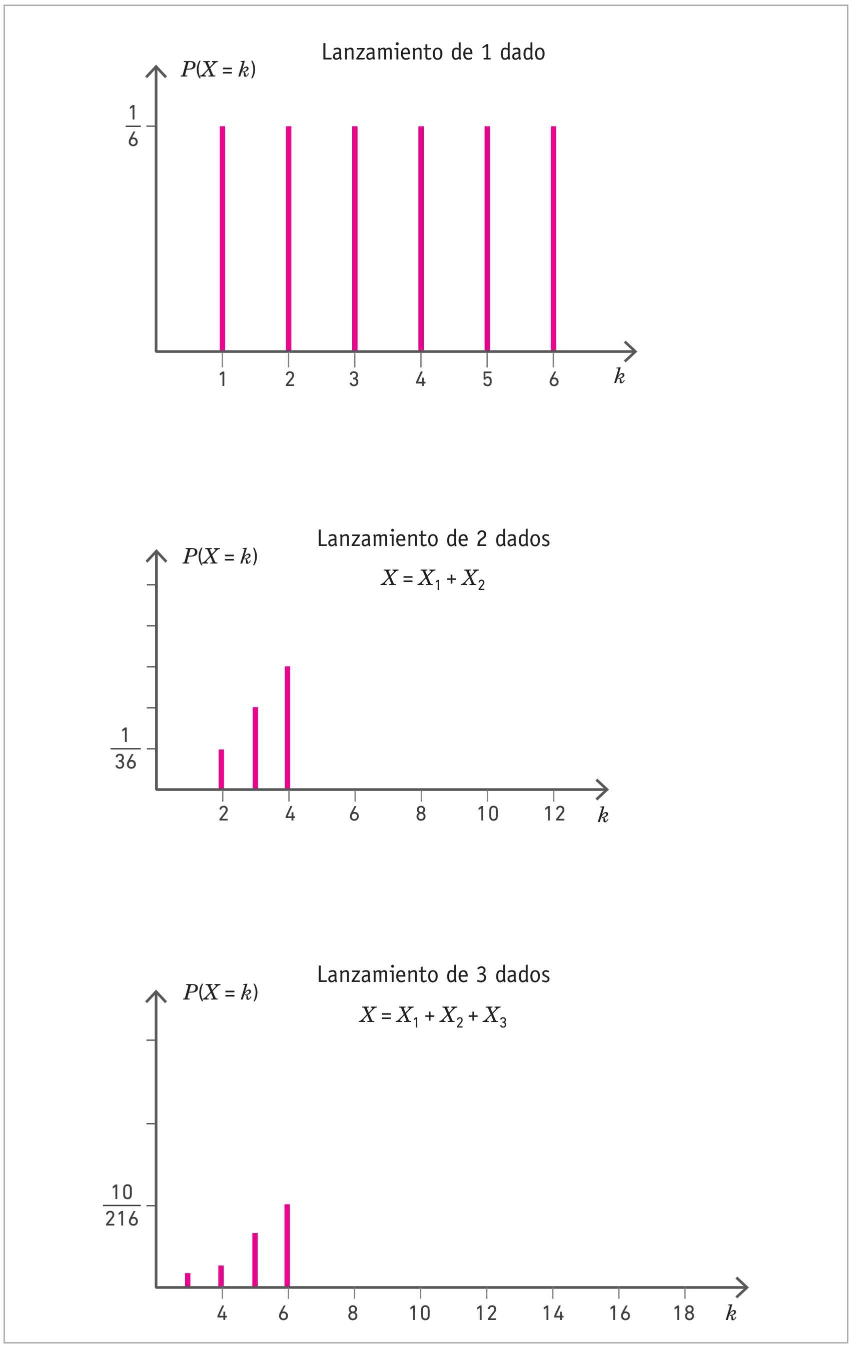
a. Determinan todas las sumas posibles y los eventos que llevan a las sumas. Completan las tablas.

$n = 1$ Suma k	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	1	1	1	1	1	1
$P(X = k)$	$\frac{1}{6}$					

$n = 2$ Suma k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Frecuencia											
$P(X = k)$											

n = 3 Suma k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Frecuencia																
$P(X = k)$																

b. Elaboran los gráficos $P(X = k)$ de las sumas k obtenidas. Completan los histogramas.



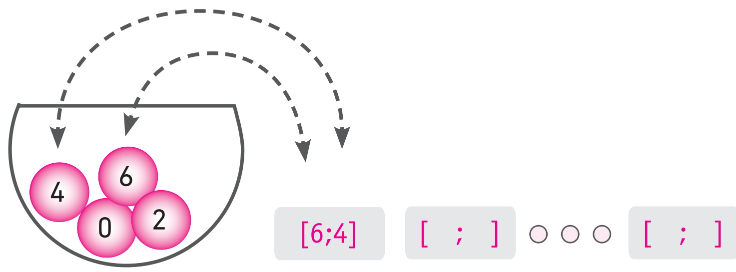
c. Conjeturan acerca de la forma de los histogramas al aumentar el número de los dados lanzados.

d. Determinan para $n = 1, 2, 3$ los valores esperados μ y las desviaciones estándar σ, y grafican la distribución normal correspondiente utilizando un *software* de simulación, como Excel, Winstats, Geogebra, o un programa disponible en internet, como www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomial.html.

e. Comparan los histogramas con el gráfico de la distribución normal.

2. Se les plantea el siguiente problema y realizan las actividades:

En una urna hay cuatro bolitas numeradas con 0, 2, 4 y 6. Se sacan al azar, con reposición, pares ordenados de números.



a. Determinan la media μ y la desviación estándar σ de la población 0, 2, 4 y 6.

b. Elaboran sistemáticamente el espacio muestral de los pares ordenados.

c. Determinan las medias aritméticas $\overline{X}$ de los pares ordenados.

d. Elaboran la distribución de frecuencias absolutas de las medias aritméticas $\overline{X}$. Completan la tabla.

Media aritmética	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia f							

e. Elaboran el gráfico de la distribución de las frecuencias mediante un histograma o un gráfico de barras delgadas.

f. Determinan la media $\overline{\mu}$ y la comparan con la media μ de la población.

g. Determinan la desviación estándar $\overline{\sigma}$ de la muestra y verifican la igualdad $\overline{\sigma} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

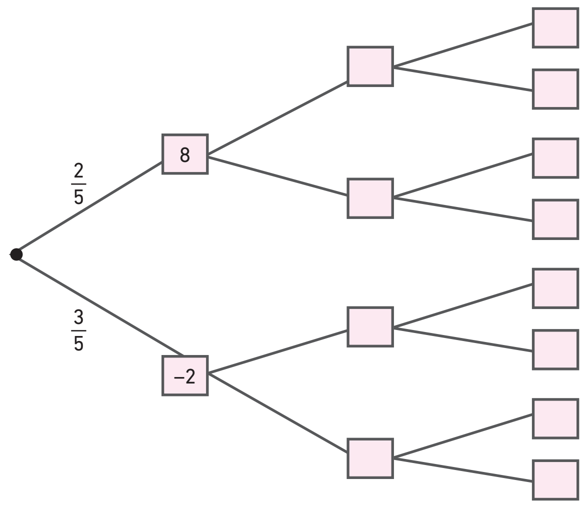
3. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

Un experimento aleatorio tiene una variable aleatoria representada en la siguiente tabla.

x	–2	8
$P(X = X)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

a. Determinan el valor esperado μ, la varianza σ^2 y la desviación estándar σ.

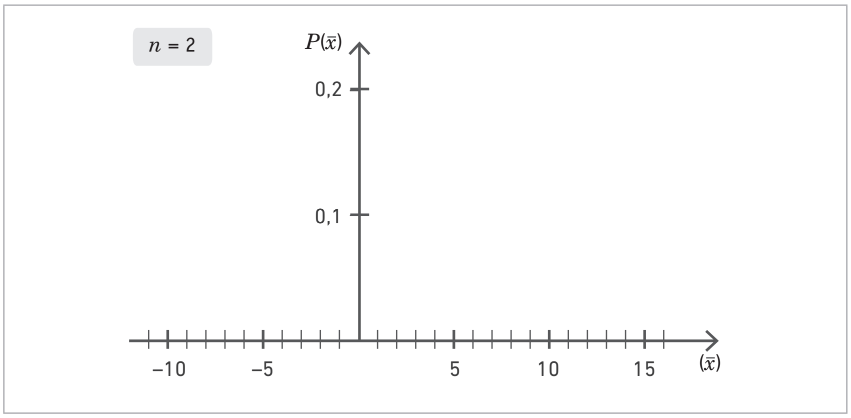
b. Se considera la suma S como el resultado de n repeticiones independientes del experimento $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$. La media se define con $\overline{X} = \frac{s}{n}$. Completan y rotulan el árbol de probabilidades para $n = 3$.

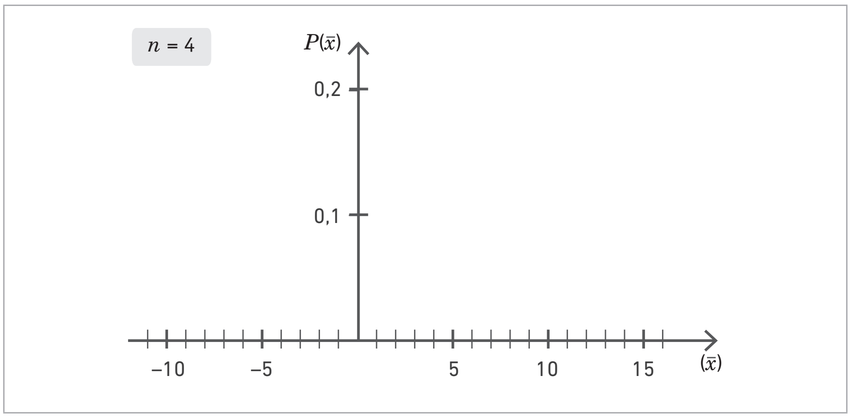


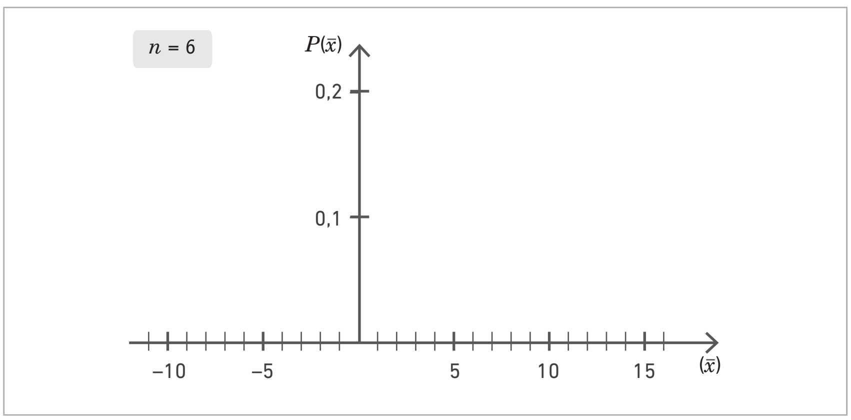
c. Determinan para n = 2, 4, 6 y 8 repeticiones el valor esperado μ, la varianza σ^2 y la desviación estándar σ de las medias muestrales representadas por la variable aleatoria $\overline{X}$. Completan la tabla.

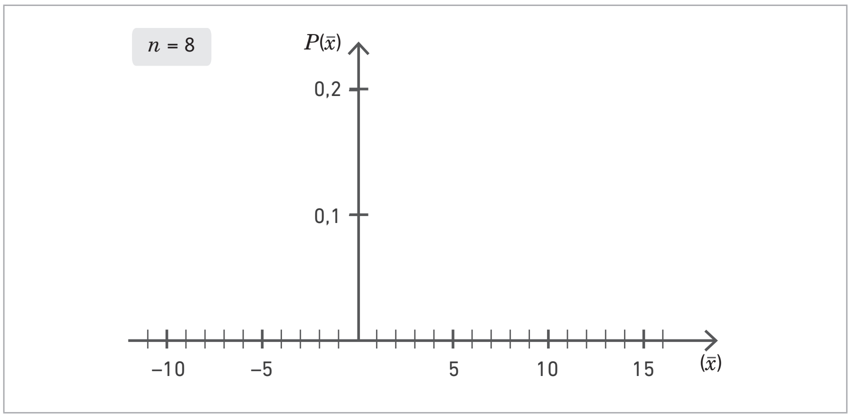
Repeticiones n	2	4	6	8
Valor esperado μ				
Varianza σ^2				
Desviación estándar σ				

d. Elaboran para n = 2, 4, 6 y 8 repeticiones los histogramas de la distribución de las medias muestrales representadas por la variable aleatoria $\overline{X}$.





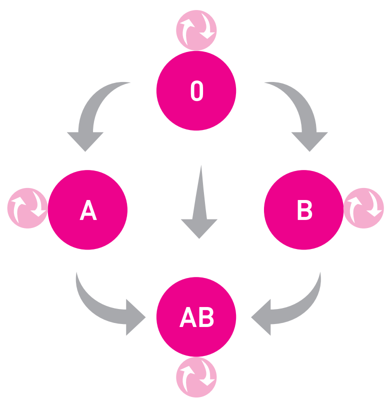




AE 15 Modelar situaciones de la vida diaria o de las ciencias naturales con distribuciones aleatorias, como la distribución binomial o la distribución normal.

1. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

   La probabilidad de ser portador del grupo sanguíneo B es de aproximadamente 10 %. Se hizo un llamado a donar sangre. En un centro de donación de sangre se registran los grupos sanguíneos de los donadores.



   a. Conjeturan acerca de las condiciones para que la situación pueda ser modelada mediante un experimento aleatorio.
   b. Mencionan las condiciones para modelar el registro de los grupos sanguíneos con una distribución binomial.
   c. Responden: ¿Cuál es el mínimo de grupos sanguíneos que se debe registrar para tener, con una probabilidad de por lo menos 90%, un registro de sangre del grupo B? Utilizan una tabla de las probabilidades binomiales acumuladas.

2. Se les plantea el siguiente problema y realizan las actividades:

En la neonatología de una clínica se registró, durante el periodo de un año, que el 20% de los recién nacidos tiene un peso natal de 2 500 g. Del registro de los nacimientos se sacaron al azar n = 10 protocolos de nacimiento.
Se quiere definir una variable aleatoria X que represente la cantidad de protocolos de la muestra de recién nacidos que tienen menos de 2 500 g de peso natal.

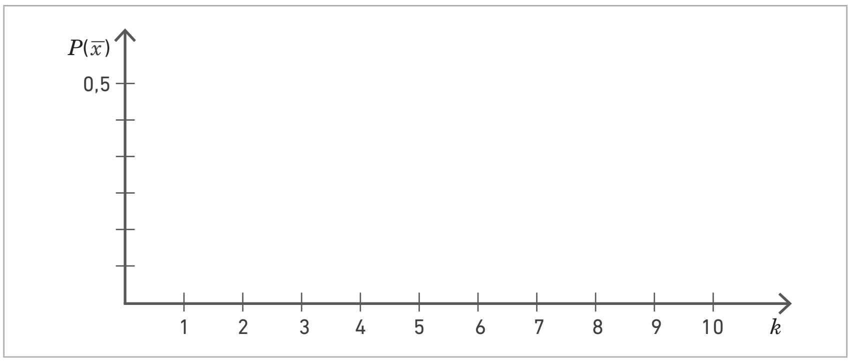
a. Conjeturan si la variable aleatoria X es continua o discreta.

b. Responden: ¿Con qué distribución de probabilidad se puede modelar la situación? Comunican su respuesta.

c. Calculan las probabilidades y las redondean a la milésima. Completan la siguiente tabla utilizando una calculadora.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = k)$											

d. Elaboran un gráfico de barras delgadas que represente la distribución.



e. Determinan el valor esperado μ de una variable aleatoria binomial con n = 10 y p = 0,2.

f. Responden: ¿Con qué probabilidad ocurre el evento que corresponde a μ en la muestra de 10 registros?

g. Se rechaza una teoría si el evento observado ocurre con una probabilidad menor o igual a p = 0,05. Conjeturan acerca de la confiabilidad de la frecuencia relativa de p = 20%, basada en la observación.

3. Se les entrega la siguiente información y llevan a cabo las actividades:

Se considera que la "duración de vida" de un motor de un auto de una cierta marca se distribuye mediante una distribución normal, con un valor esperado $\mu = 105\,000$ km y una desviación estándar $\sigma = 10\,000$ km.

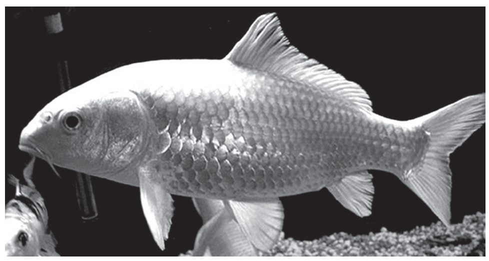
a. Determinan el porcentaje de los motores que tienen una "duración de vida" mayor a 120 000 km.
b. Indican el porcentaje de los motores cuya "duración de vida" se desvía por más de 12 000 km del valor esperado.
c. Responden: ¿Se puede calcular que un motor tiene una "duración de vida" de 100 000 km? Explican la respuesta.
d. Determinan el intervalo de kilometraje al cual pertenece, aproximadamente, 95 % de la "duración de vida" de los motores.

EJEMPLO DE EVALUACIÓN

APRENDIZAJES ESPERADOS	INDICADORES DE EVALUACIÓN SUGERIDOS
AE 12 Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.	› Verifican mediante varios ejemplos, utilizando herramientas técnicas de simulación o de cálculo, que una distribución normal se define por el valor esperado μ y la desviación estándar σ. › Reconocen el significado de la función Φ estandarizada de distribución acumulada. › Utilizan calculadora o tablas de la función Φ de distribución acumulada para determinar probabilidades relacionadas con intervalos. › Determinan, para un dato de una muestra aleatoria de población normal, la ubicación de este en los intervalos $[\mu - \sigma , \mu + \sigma]$, $[\mu - 2\sigma , \mu +2\sigma]$, $[\mu - 3\sigma , \mu +3\sigma]$.

ACTIVIDAD PROPUESTA

Lea el siguiente problema y lleve a cabo lo solicitado:



En un lago hay una población de carpas que se distribuye mediante una distribución normal. Basándose en los resultados de investigaciones biológicas y ambientales, se estima el peso medio en 4 kg con una desviación estándar de 1,25 kg.

a. Determine la probabilidad de pescar una carpa de un peso máximo de 2,5 kg.
b. Determine la probabilidad de pescar una carpa de un peso mínimo de 5 kg.
c. Responda: ¿Cuál es el porcentaje de todas las carpas que tienen un peso entre 3 kg y 4,5 kg?
d. Responda: ¿En qué intervalo se encuentra el 80 % de todas las carpas?
e. Conjeture acerca de la probabilidad de pescar una carpa de 3,075 kg.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Al evaluar, se sugiere considerar los siguientes aspectos:

- Interpreta el proceso de pescar una carpa como experimento aleatorio y utiliza las tablas de probabilidad de la función Φ estandarizada de distribución acumulada.
- Determina correctamente y con un redondeo adecuado los porcentajes relacionados con los intervalos.
- Determina correctamente y con un redondeo adecuado los límites del intervalo requerido.
- Argumenta que la probabilidad del evento puntual de pescar una carpa de un peso exacto de 3,075 kg es 0. Menciona, además, que la variable aleatoria es continua.

Bibliografía

BIBLIOGRAFÍA PARA LOS Y LAS DOCENTES

Aguilar, A. (2009). *Álgebra*. Ciudad de México: Pearson Educación.

Alsina, C., Fortuny, J. M. y Burgués, C. (1989). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Araya, R. y Matus, C. (2008). *Buscando un orden para el azar*. Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Artigue, M. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Ciudad de México: Iberoamericana.

Baeza, O. (2008). *Funciones potencia, exponencial y logaritmo*. Santiago de Chile: Universidad de Santiago.

Baum, D. y Klein, H. (2008). *XQuadrat 6*. München: Oldenbourg.

Berlanga, R., Bosch, C. y Rivaud, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas*. Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

Bescherer, C. y Jöckel, S. (2011). *Denkstark 9*. Braunschweig: Westermann.

Bobadilla A. y Billike, J. (1997). *Apuntes de Cálculo I*. Santiago: Universidad de Santiago de Chile

Böer, H. (2007). *Mathe live*. Stuttgart: Klett.

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba.

Burger, E. (2011). *Álgebra 1*. California: Holt McDougal.

Cantoral, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Ciudad de México: Trillas.

Cedillo, T. (1997). *Calculadoras: Introducción al álgebra*. Ciudad de México: Iberoamericana.

Centeno, J. (1995). *Números decimales*. Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: Horsori.

Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó.

Dolores, C. (2007). *Matemática educativa*. Madrid: Ediciones Diaz de Santos.

Douglas, G. (1997). *Física. Principios con Aplicaciones*. Ciudad de México: Prentice Hall.

Duhalde, M. E. y González, M. T. (2003). *Encuentros cercanos con la matemática*. Buenos Aires: Aigue.

Elphick, D., Winston, H. et al. (2001). *101 Actividades para implementar los objetivos fundamentales transversales*. Santiago de Chile: Lom.

Filloy, E. (2003). *Matemática educativa*. Ciudad de México: Fondo De Cultura Económica.

Fortuny, J. (1996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

Freudigmann, H. (2009). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien*. Stuttgart: Klett.GARCÍA

García, G. (1998). *Heurística geométrica*. Ciudad de México: Limusa.

Goñi, J. M. (2000). *El currículo de matemática en los inicios del siglo XXI*. Barcelona: Graó.

Govinden, L. (1998). *Introducción a la estadística*. Ciudad de México: McGraw-Hill.

Guedj, D. (2000). *El teorema del Loro. Novela para aprender matemáticas*. Barcelona: Anagrama.

Hong, T., Riddington, M. y Grier, M. (2008). *New Mathematics Counts*. Singapore: Marshall Cavendish Internacional.

Jiménez, M., Matus, C., Moya, M. y Muñoz, M. (2009). *Unidad de Álgebra y Funciones*. Santiago de Chile: Enlaces.

Joshua, S. y Dupin, J. (2005). *Introducción a la didáctica de las ciencias y la matemática*. Buenos Aires: Colihue.

Lehmann, C. (2001). *Álgebra*. Ciudad de México: Limusa.

Miller, C., Heeren, V., Hornsby, E. (1999). *Matemática: Razonamiento y Aplicaciones*. Ciudad de México: Pearson Educación.

Ministerio de Educación. (2004). *Matemática. Programa de Estudio 3° Medio*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2004). *Matemática. Programa de Estudio 4° Medio*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios Matemática*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Números y Operaciones*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Álgebra*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Geometría*. Santiago de Chile: Autor.

Ministerio de Educación. (2009). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Sector Matemática. Mapa de Progreso de Datos y Azar.* Santiago de Chile: Autor.

Miranda, H., Moya, M. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Oteíza, F., Zamorano, L. y Baeza, O. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Oteíza, F., Zamorano, L. y Baeza, O. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano. Ángulos en el plano.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Planas, N. y Alsina, Á. (2005). *Educación matemática y buenas prácticas.* Barcelona: Graó.

Luelmo, M. J. (1997). *Las matemáticas en el entorno.* Barcelona: Graó.

Rodríguez, J. (1997). *Razonamiento matemático.* Ciudad de México: Internacional Thompson.

Rodríguez, G. y Escalante, M. (2008). *Unidad función cuadrática y raíz cuadrada.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Saavedra, E. (2005). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad. Colección ciencias.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Santander, R. (2008). *Álgebra I.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Schätz, U. y Eisentraut, F. (2009). *Mathematik für Gymnasien.* Bamberg: C.C. Buchner.

Serrano, J. M. (1997). *Aprendizaje cooperativo en matemática.* Murcia: Universidad de Murcia.

Spiegel, M. y Moyer, R. (2006). *Álgebra superior.* Ciudad de México: McGraw-Hill.

Sullivan, M. (2006). *Álgebra y trigonometría.* Ciudad de México: Pearson Educación.

Tahan, M. (2002). *El hombre que calculaba.* Ciudad de México: Limusa.

Tapia, Ó., Ormazábal, M., Olivares, J. y López, D. (2007). *Manual de Preparación PSU. Matemática.* Santiago de Chile: Universidad Católica de Chile.

Valenzuela, P. H. (2006). *Fundamentos de matemática universitaria.* Ciudad de México: Pearson Educación

Wai-Keung, C. y Kam-Yuk, L. (2010). *New Way: Mathematics & Statistics.* Hong Kong: Times Publishing.

BIBLIOGRAFÍA PARA LOS Y LAS ESTUDIANTES

Aguilar, A. (2008). *Matemáticas simplificadas: aritmética, álgebra, geometría analítica, cálculo diferencial, cálculo integral.* Ciudad de México: Pearson Educación.

Araya, R. y Matus, C. (2008). *Buscando un orden para el azar.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Baeza, O. (2008). *Funciones potencia, exponencial y logaritmo.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Baum, D. y Klein, H. (2008). *XQuadrat 6.* München: Oldenbourg.

Berlanga, R., Bosch, C. y Rivaud, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas.* Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

Bescherer, C. y Jöckel, S. (2011). *Denkstark 9.* Braunschweig: Westermann.

Böer, H. et al. (2007). *Mathe live.* Stuttgart: Klett.

Burger, E. (2011). *Álgebra 1.* California: Holt McDougal.

Cantoral, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático.* Ciudad de México: Trillas.

Filloy, E. (2003). *Matemática educativa.* Ciudad de México: Fondo De Cultura Económica.

Freudigmann, H. (2009). *Lambacher Schweizer: Mathematik für Gymnasien.* Stuttgart: Klett.

García, G. (1998). *Heurística geométrica.* Ciudad de México: Limusa.

Govinden, L. (1998). *Introducción a la estadística.* Ciudad de México: McGraw-Hill.

Hong, T., Riddington, M. y Grier, M. (2008). *New Mathematics Counts.* Singapore: Marshall Cavendish Internacional.

Miranda, H. y Moya, M. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Oteíza, F., Zamorano, L. y Baeza,O. (2008). *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Oteíza, F., Zamorano, L. y Baeza, O. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano. Ángulos en el plano.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Rodríguez, G. y Escalante, M. (2008). *Unidad función cuadrática y raíz cuadrada.* Santiago de Chile: Universidad de Santiago de Chile.

Schätz, U., Eisentraut, F. (2009). *Mathematik für Gymnasien.* Bamberg: C.C. Buchner.

Tahan, M. (2002). *El hombre que calculaba.* Ciudad de México: Limusa.

Wai-Keung, C. y Kam-Yuk, L. (2010). *New Way: Mathematics & Statistics.* Hong Kong: Times Publishing.

PÁGINAS Y RECURSOS DIGITALES INTERACTIVOS

(Los sitios web y enlaces sugeridos en este Programa fueron revisados en agosto de 2014. Es importante tener en cuenta que para acceder a los enlaces puede ser necesario utilizar un navegador distinto al que usa frecuentemente. Además, para la correcta ejecución de algunos recursos, se recomienda actualizar la versión Flash y Java).

Portal Educar Chile: www.educarchile.cl/Portal.Base

Universidad de UTAH. http://nlvm.usu.edu/es/nav

Proyecto Descartes, España: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/aplicaciones.php

Eduteka, Colombia: www.eduteka.org

www.ugr.es/~jsalinas/herramar.htm

www.virtual.uptc.edu.co

www.es.easycalculation.com/statistics/binomial-distribution.php

www.edumat.net

www.matematicasvisuales.com/html/probabilidad/varaleat/binomial.html

Software: Geogebra, Excel y Winstats.

Curva Normal, probabilidad acumulada: https://www.geogebratube.org/student/mecOwvlRd

Curva normal, dos colas, relación con espacios de confianza: http://tube.geogebra.org/student/mdqgPNtOL

BIBLIOGRAFÍA CRA

A continuación se detallan publicaciones que se pueden encontrar en las Bibliotecas CRA (Centro de Recursos para el Aprendizaje) a lo largo del país, las cuales pueden ser utilizadas en las distintas unidades.

Berlanga, R., Bosch y C. y Rivaud, J. (2000). *Las matemáticas, perejil de todas las salsas.* Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica.

Corbalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana.* Barcelona: Graó.

Galdós, L. (1995). *Consultor matemático.* Madrid: Cultural de Ediciones.

Gardner, M. (2007). *Los acertijos de Sam Loyd.* Madrid: Zugarto.

Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números.* Barcelona: Ediciones B.

Heber, J. (2005). *Olimpíadas matemáticas: el arte de resolver problemas.* Ciudad de México: Los libros de El Nacional.

Jiménez, D. (2006). *Matemáticos que cambiaron al mundo.* Ciudad de México: Los libros de El Nacional.

Nomdedeu, X. (2000). *Mujeres, manzanas y matemáticas, entretejidas.* Madrid: Nivola Libros.

Pérez-Ruiz, M. (2002). *Pitágoras. El misterio de la voz interior. Una investigación de arqueología filosófica.* Barcelona: Océano.

Serrano, E. (2007). *¡Ojalá no hubiera números!* Madrid: Nivola Libros.

Tahan, M. (2006). *Matemática curiosa y divertida.* Buenos Aires: Pluma y Papel.

Vancleave, J. (1997). *Matemáticas para niños y jóvenes.* Ciudad de México: Limusa

Anexos

ANEXO 1

USO FLEXIBLE DE OTROS INSTRUMENTOS CURRICULARES

Existe un conjunto de instrumentos curriculares que los y las docentes pueden utilizar de manera conjunta y complementaria con el Programa de Estudio. Estos pueden ser usados de manera flexible para apoyar el diseño e implementación de estrategias didácticas y para evaluar los aprendizajes.

Orientan sobre la progresión típica de los aprendizajes

MAPAS DE PROGRESO

Ofrecen un marco global para conocer cómo progresan los aprendizajes clave a lo largo de la escolaridad.

Pueden usarse, entre otras posibilidades, como un apoyo para abordar la diversidad de aprendizajes que se detectan al interior de un curso, ya que permiten:

› Caracterizar los distintos niveles de aprendizaje en los que se encuentran las y los estudiantes de un curso.

› Reconocer de qué manera deben continuar progresando los aprendizajes de los grupos de estudiantes que se encuentran en estos distintos niveles.

Apoyan el trabajo didáctico en el aula

TEXTOS ESCOLARES

Desarrollan los Objetivos Fundamentales y los Contenidos Mínimos Obligatorios para apoyar el trabajo de los las y los estudiantes en el aula y fuera de ella, y les entregan explicaciones y actividades para favorecer su aprendizaje y su autoevaluación.

Las y los docentes pueden enriquecer la implementación del currículum haciendo también uso de los recursos entregados por el Mineduc por medio de:

› Los Centros de Recursos para el Aprendizaje (CRA), que ofrecen materiales impresos, audiovisuales y digitales.

› El Programa Enlaces, que pone a disposición de los establecimiento diversas herramientas tecnológicas.

ANEXO 2

OBJETIVOS FUNDAMENTALES POR SEMESTRE Y UNIDAD

OBJETIVO FUNDAMENTAL	Semestre 1		Semestre 2	
	U1	U2	U3	U4
1. Modelar situaciones o fenómenos cuyo modelo resultante sea la función potencia, inecuaciones lineales y sistemas de inecuaciones.	●			
2. Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones.	●			
3. Analizar las condiciones para la existencia de la función inversa.	●			
4. Comprender que puntos, rectas y planos pueden ser representados en el sistema coordenado tridimensional y determinar la representación cartesiana y vectorial de la ecuación de la recta en el espacio.		●		
5. Determinar áreas y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación o traslación de figuras planas en el espacio.		●		
6. Evaluar críticamente información estadística extraída desde medios de comunicación, tales como periódicos, artículos de revistas o desde internet.			●	
7. Relacionar y aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, para el caso de una variable aleatoria continua.			●	
8. Argumentar acerca de la confiabilidad de la estimación de la media de una población con distribución normal, a partir de datos muestrales.				●
9. Comprender que la distribución de medias muestrales de muestras aleatorias de igual tamaño extraídas de una población tiende a una distribución normal a medida que el tamaño de las muestras aumenta.				●
10. Utilizar modelos probabilísticos para representar y estudiar diversas situaciones y fenómenos en condiciones de incerteza.				●
11. Formular conjeturas, utilizar heurísticas modificando o generalizando estrategias conocidas y modelos matemáticos en la resolución de problemas referidos a situaciones o fenómenos que puedan ser descritos en forma simbólica, en condiciones de incerteza y espaciales, fomentando la actitud reflexiva y crítica en la resolución de problemas.				●

ANEXO 3

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS POR SEMESTRE Y UNIDAD

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS	Semestre 1		Semestre 2	
	U1	U2	U3	U4
ÁLGEBRA				
1. Análisis de la función potencia $f(f) = ax^n$ con a y x en los reales y n entero, en situaciones que representen comparación de tasas de crecimiento aritmético y geométrico y cálculo de interés compuesto, mediante el uso de un *software* gráfico.	●			
2. Identificación de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas y determinación de la función inversa cuando proceda.	●			
3. Representación de intervalos mediante lenguaje conjuntista y uso de las operaciones con conjuntos, para resolver inecuaciones y sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita.	●			
4. Resolución de problemas que implican el planteamiento de inecuaciones y de sistemas de inecuaciones lineales con una incógnita; representación de las soluciones usando intervalos en los reales; discusión de la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto. Representación de las situaciones usando un procesador simbólico y gráfico de expresiones algebraicas y funciones.	●			
GEOMETRÍA				
5. Deducción de la distancia entre dos puntos ubicados en un sistema de coordenadas en tres dimensiones y su aplicación al cálculo del módulo de un vector.		●		
6. Identificación y descripción de puntos, rectas y planos en el espacio; deducción de la ecuación vectorial de la recta y su relación con la ecuación cartesiana.		●		
7. Formulación y verificación, en casos particulares, de conjeturas respecto de los cuerpos geométricos generados a partir de traslaciones o rotaciones de figuras planas en el espacio.		●		
8. Resolución de problemas sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas.		●		

CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS	Semestre 1		Semestre 2	
	U1	U2	U3	U4
DATOS Y AZAR				
9. Interpretación del concepto de variable aleatoria continua y de la función de densidad de una variable aleatoria con distribución normal.			●	
10. Estudio y aplicación de elementos básicos de la distribución normal, a partir de diversas situaciones en contexto, tales como mediciones de peso y estatura en adolescentes, puntajes de pruebas nacionales e internacionales, datos meteorológicos de temperatura o precipitaciones. Relación entre la distribución normal y la distribución normal estándar.			●	
11. Realización de conjeturas sobre el tipo de distribución al que tienden las medias muestrales; verificación mediante experimentos en que se extraen muestras aleatorias de igual tamaño de una población por medio de herramientas tecnológicas.			●	
12. Estimación de intervalos de confianza, para la media de una población con distribución normal y varianza conocida, a partir de una muestra y un nivel de confianza dado.			●	
13. Análisis crítico de las inferencias realizadas a partir de encuestas, estudios estadísticos o experimentos, usando criterios de representatividad de la muestra.				●
14. Descripción de los resultados de repeticiones de un experimento aleatorio, aplicando las distribuciones de probabilidad normal y binomial mediante el uso de herramientas tecnológicas.				●
15. Aproximación de la probabilidad binomial por la probabilidad de la normal, aplicación al cálculo de experimentos binomiales.				●

ANEXO 4

RELACIÓN ENTRE APRENDIZAJES ESPERADOS, OBJETIVOS FUNDAMENTALES (OF) Y CONTENIDOS MÍNIMOS OBLIGATORIOS (CMO).

SEMESTRE 1

APRENDIZAJES ESPERADOS		OF	CMO
UNIDAD 1			
AE 01	Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia $f(x) = a \cdot x^z$ con $\|z\| \leq 3$.	1	1
AE 02	Resolver problemas utilizando inecuaciones lineales o sistemas de inecuaciones lineales.	2	3, 4
AE 03	Determinar la función inversa de una función dada.	3	2
UNIDAD 2			
AE 04	Representar e identificar puntos en un sistema tridimensional de coordenadas.	4	5
AE 05	Representar rectas y planos en el espacio mediante ecuaciones vectoriales y cartesianas.	4	6
AE 06	Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por traslación de figuras planas en el espacio.	5	7, 8
AE 07	Determinar áreas de superficie y volúmenes de cuerpos geométricos generados por rotación de figuras planas en el espacio.	5	7, 8

SEMESTRE 2

APRENDIZAJES ESPERADOS		OF	CMO
UNIDAD 3			
AE 08	Evaluar críticamente información estadística extraída de medios de comunicación, tales como periódicos y revistas, o de internet.	6	13
AE 09	Interpretar el concepto de variable aleatoria continua.	7	9
AE 10	Aplicar los conceptos de función de densidad y distribución de probabilidad, en el caso de una variable aleatoria continua.	7	10
UNIDAD 4			
AE 11	Aproximar, a partir de histogramas de distribuciones binomiales, el gráfico de la campana de Gauss.	8	15
AE 12	Aplicar distribuciones normales para resolver problemas de la vida diaria.	8	14
AE 13	Estimar la media poblacional de una distribución normal sobre la base de niveles de confianza dados.	9	14
AE 14	Verificar mediante ejemplos concretos que la media $\overline{X}$ de muestras aleatorias del tamaño n, extraídas de una población, se distribuye aproximadamente normal, si se aumenta el tamaño de la muestra.	10, 11	11
AE 15	Modelar situaciones de la vida diaria o de las ciencias naturales con distribuciones aleatorias, como la distribución binomial o la distribución normal.	10, 11	12