Capítulo 2

Vectores

2.1. Escalares y vectores

Una cantidad física que pueda ser completamente descrita por un número real, en términos de alguna unidad de medida de ella, se denomina una cantidad física escalar. Como veremos existen cantidades físicas que son descritas por más de un número, o por un número y otras propiedades. En particular los vectores se caracterizan por tener una magnitud, expresable por un número real, una dirección y un sentido. Sin embargo hay algo más que explicaremos.

2.2. Sistemas de referencia

Para especificar la posición de un punto en el espacio, se utilizan sistemas de referencia. Esta posición se define en forma relativa a algún determinado sistema de referencia.

2.2.1. Sistema cartesiano

En un sistema de referencia cartesiano, existen tres ejes denominados ejes cartesianos X, Y, Z ortogonales que se intersectan en un punto O llamado origen del sistema cartesiano. La posición de un punto respecto a ese sistema de referencia se define por el conjunto de sus coordenadas cartesianas (x, y, z), esto es mediante tres números, ver figura (2.1)

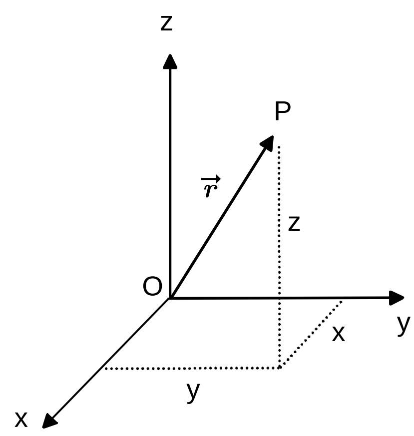


Figura 2.1: coordenadas cartesianas

Los rangos de variación de las coordenadas cartesianas son

$$-\infty < x < \infty, \ -\infty < y < \infty, \ -\infty < z < \infty.$$

2.2.2. Sistema esférico de coordenadas

En el sistema esférico de coordenadas, la posición de un punto está definida por sus tres coordenadas esféricas r, θ y ϕ, ver figura (2.2)

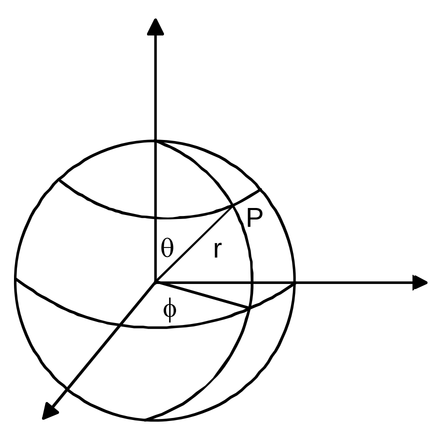


Figura 2.2: coordenadas esféricas

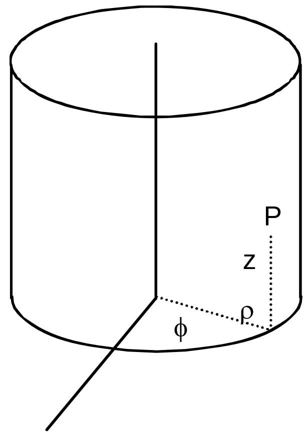


Figura 2.3: coordenadas cilíndricas

donde r es la distancia al origen, θ es el ángulo que forma OP con el eje Z y ϕ es el ángulo que forma la proyección de la línea OP en el plano XY con el eje X. Los rangos de variación de las coordenadas esféricas son

$$0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta < \pi,\ 0 \leqslant \phi < 2\pi.$$

2.2.3. Sistema cilíndrico de coordenadas

En el sistema cilíndrico de coordenadas, la posición de un punto está definida por sus tres coordenadas cilíndricas ρ, z y ϕ, ver figura (2.3) donde

ρ es la distancia de la proyección del punto en el plano OXY al origen, z es la altura sobre el plano OXY y ϕ es el ángulo que forma la proyección de la línea OP en el plano XY con el eje X. Los rangos de variación de las coordenadas cilíndricas son

$$0 \leqslant \rho < \infty,\ 0 \leqslant \phi < 2\pi,\ \ -\infty < z < \infty.$$

2.2.4. Sistema polar de coordenadas

En el sistema polar de coordenadas, la posición de un punto sobre un plano está definida por sus dos coordenadas denominadas polares, r y θ, ver figura (2.4)

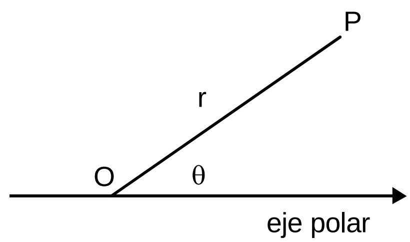


Figura 2.4: coordenadas polares

donde r es la distancia del punto P al origen, θ es el ángulo que forma la línea OP con el eje X, llamado aquí eje polar. Los rangos de variación de las coordenadas polares son

$$0 \leqslant r < \infty, \; 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

2.2.5. Relaciones entre las coordenadas

Es tarea sencilla establecer las siguientes relaciones entre las diversas coordenadas para los sistemas recién descritos

- Cartesiano-esférico

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\phi, \\ y &= r \sin\theta \sin\phi, \\ z &= r \cos\theta. \end{aligned} \tag{2.1}$$

- Cartesiano-cilíndrico

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\phi, \\ y &= \rho \sin\phi, \\ z &= z. \end{aligned} \tag{2.2}$$

- Polar-cartesiano

$$\begin{aligned} x &= r \cos\theta, \\ y &= r \sin\theta. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Más detalles se proporcionan después de introducir el concepto de vector. Si está perdido respecto de la trigonometría, vea resumen al final.

2.3. Desplazamientos en el espacio

El concepto que dio lugar a los vectores, es el de desplazamiento. Considere un sistema de referencia respecto al cual esté definida la posición de puntos.

DEFINICION 2.3.1 *Se dice que un punto se mueve respecto a un sistema de referencia, si sus coordenadas varían con el tiempo.*

DEFINICION 2.3.2 *Un desplazamiento se define como cualquier cambio de posición de un punto en el espacio*

Este concepto básico de desplazamiento es en principio más elemental que el concepto de movimiento de un punto, puesto que no tiene relación con tiempos. Si un punto pasa de una posición A a otra posición B, se dice que el punto se ha desplazado de A a B. De su definición de desprende que un desplazamiento tiene tres características

- Su magnitud, que se define como la distancia entre el punto inicial y el punto final.
- Su dirección, correspondiente a la dirección de la recta AB. (rectas paralelas tienen la misma dirección)
- Su sentido, de A hacia B. Así el sentido del desplazamiento de B hacia A es contrario al desplazamiento de A hacia B.

Además, desplazamientos sucesivos se combinan (o se suman) de acuerdo a la regla del triángulo, indicada en la figura siguiente (2.5), donde el desplazamiento $A \longrightarrow B$ seguido del desplazamiento $B \longrightarrow C$ es equivalente a un desplazamiento $A \longrightarrow C$.

Eso queda absolutamente claro de la figura que define la regla de combinación triangular de desplazamientos. Esta regla se generaliza en la sección siguiente para dar origen al concepto de vector. Como veremos más adelante, para el caso de las fuerzas se utiliza la regla del paralelógramo en vez de la del triángulo para obtener la fuerza resultante. Ambas reglas son completamente equivalentes.

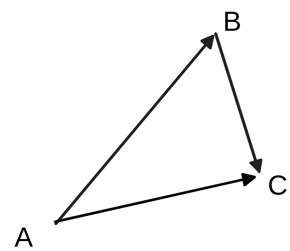


Figura 2.5: desplazamiento equivalente

2.4. Vectores

Los vectores son objetos que tienen las características de los desplazamientos, es decir que tienen magnitud, dirección, sentido, y tales que la combinación (llamada suma vectorial) de dos de ellos, se obtiene de acuerdo a la regla del triángulo indicada en la figura anterior. Obviamente un ejemplo de vectores son los desplazamientos. Otro ejemplo de vectores en Física, lo constituyen las fuerzas que se aplican a los cuerpos, tema del siguiente capítulo. Ellas poseen las tres características básicas, magnitud dirección y sentido. La cuestión de que si las fuerzas se combinan de acuerdo a la regla de suma vectorial, puede y es establecida experimentalmente para ciertas condiciones que explicaremos en el capítulo siguiente. Es decir debe establecerse que aplicar dos fuerzas dadas sobre un cuerpo es físicamente equivalente a aplicar una fuerza, llamada fuerza resultante que tiene la magnitud, dirección y sentido dada por la regla de adición vectorial.

Debemos señalar que no es suficiente que un objeto tenga magnitud, dirección, sentido para ser considerado un vector. Deben necesariamente combinarse como tales. Las rotaciones de los cuerpos, en torno a la dirección de un eje, en un sentido u otro, y de cierta magnitud (el ángulo), no son vectores porque no se combinan como los desplazamientos. En el capítulo sobre fuerzas veremos que siempre es posible cambiar los puntos de aplicación de fuerzas que actúan sobre un cuerpo indeformable a un determinado punto, allí sumarlas como vectores obteniendo la fuerza resultante, pero es en general necesario agregar el torque de las fuerzas que se cambiaron de posición respecto al punto donde se obtiene la resultante vectorial. Esta característica de las fuerzas no la poseen los desplazamientos.

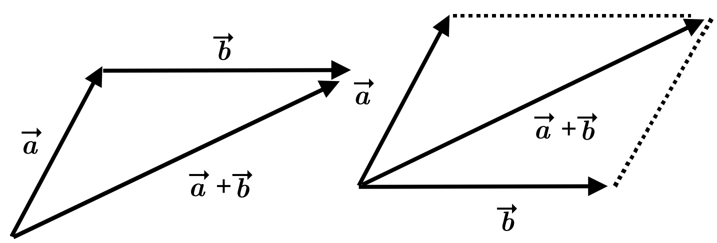
2.4.1. Notación

Los vectores, cualquiera sea su naturaleza, los denotaremos en el texto con letras con flechas: $\vec{a}$, $\vec{B}$, $\vec{f}$ y la combinación o suma vectorial de ellos con el símbolo usual de suma $+$, es decir

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$$

2.4.2. Suma de vectores

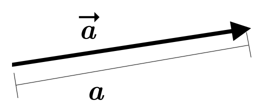
Naturalmente solo podremos sumar vectores del mismo tipo: desplazamientos, fuerzas, otros, de modo que la regla de suma vectorial puede ser representada en cualquiera de las dos figuras siguientes, reglas conocidas como triangular y del paralelógramo:



triangular paralelogramo

2.4.3. Magnitud de un vector

La magnitud de un vector $\vec{a}$ será representada por $|\vec{a}|$ y a veces simplemente por a, y representa por ejemplo, para los desplazamientos la distancia entre el punto inicial y el final y para una fuerza, la magnitud de ella expresada en unidades de fuerza.



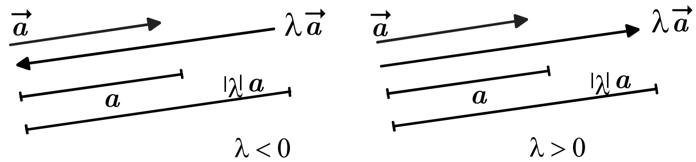
magnitud de vector

2.4.4. Multiplicación de un vector por un escalar

Si $\vec{a}$ es un vector y λ es un escalar (número real) definimos el producto de un escalar por un vector al vector

$$\lambda\vec{a}$$

que es un vector paralelo al vector $\vec{a}$, de magnitud $|\lambda|$ veces la magnitud de $\vec{a}$, y del mismo sentido del vector $\vec{a}$ si $\lambda > 0$ y de sentido contrario si $\lambda < 0$.

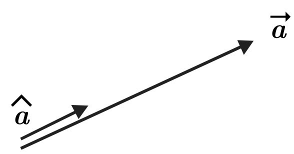


2.4.5. Vectores unitarios

Al vector paralelo y del mismo sentido que el vector $\vec{a}$, pero de magnitud unidad lo denotaremos por $\hat{a}$. Entonces obviamente tenemos la siguiente importante relación

$$\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}, \tag{2.4}$$

que se ilustra en la figura siguiente



2.4.6. Vectores unitarios cartesianos

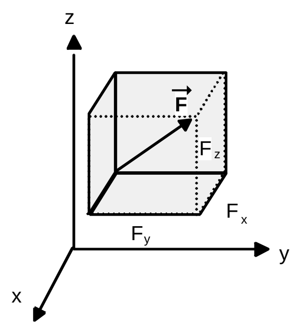
Los vectores de magnitud unidad, paralelos y en el sentido positivo de los ejes cartesianos, los denotaremos por $\hat{\imath},\ \hat{\jmath},\ \hat{k}$.

2.4.7. Componentes cartesianas de un vector

Todo vector $\vec{F}$ (en tres dimensiones), puede ser escrito como

$$\vec{F} = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\ \hat{k} = (F_x, F_y, F_z), \tag{2.5}$$

donde F_x, F_y, F_z se denominan componentes cartesianas del vector. Hemos señalado además una notación alternativa para denotar un vector como un trío ordenado formado por sus tres componentes (F_x, F_y, F_z).



componentes cartesianas

2.4.8. Vector nulo

Un vector de magnitud cero, se denomina vector nulo y lo indicaremos por $\vec{0}$.

2.4.9. Resta de vectores

Se define al vector diferencia

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\vec{b}, \tag{2.6}$$

que pasa a ser un caso especial de suma de vectores como se ilustra en la figura

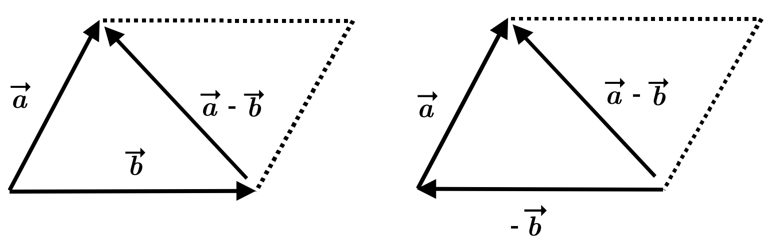


Figura 2.6:

Note que para realizar las operaciones descritas los vectores pueden desplazarse libremente a líneas paralelas, pues corresponden a la misma dirección, siendo necesario mantener su magnitud y su sentido. En el capítulo siguiente, cuando se trate de las fuerzas, se indicarán las formas de hacerlo pues en ese caso, el punto de aplicación de una fuerza es relevante y no puede ser cambiado arbitrariamente sin cambiar su efecto.

2.4.10. Producto escalar de vectores

Dados dos vectores $\vec{a}$, y $\vec{b}$, se define el producto escalar de ellos al número real

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\alpha = ab\cos\alpha, \tag{2.7}$$

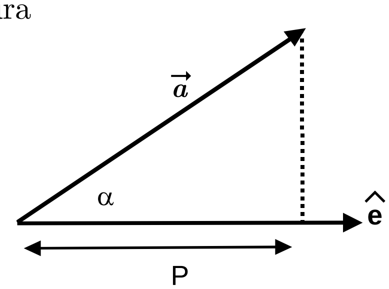
siendo α el ángulo que forman las direcciones de los dos vectores.

2.4.11. Proyección de un vector en una dirección

La proyección P de un vector $\vec{a}$ en la dirección y sentido de $\hat{e}$ es un escalar dado por

$$P = \vec{a} \cdot \hat{e} = |\vec{a}| \cos\alpha, \tag{2.8}$$

que se ilustra en la figura



2.4.12. Conmutatividad

Es evidente que el producto punto o escalar así definido es conmutativo

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \tag{2.9}$$

2.4.13. La distributividad del producto escalar respecto a la suma

La distributividad el producto escalar respecto a la suma, es decir la propiedad

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \tag{2.10}$$

puede establecerse del siguiente modo.

Considere la figura siguiente donde se muestran las proyecciones

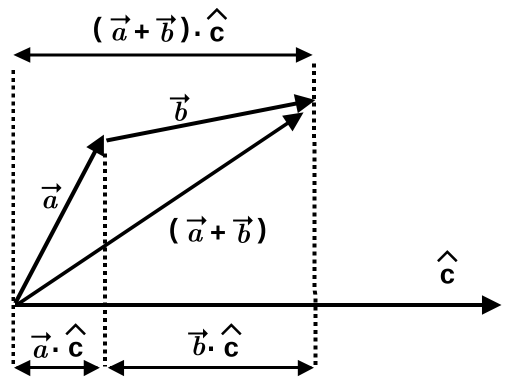


Figura 2.7:

La figura muestra que la suma de las proyecciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sobre la dirección de $\vec{c}$ igualan a la proyección de $\vec{a}+\vec{b}$ sobre esa misma dirección, esto es

$$\vec{a}\cdot\hat{c}+\vec{b}\cdot\hat{c}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\hat{c},$$

y multiplicando por $|\vec{c}|$ se obtiene

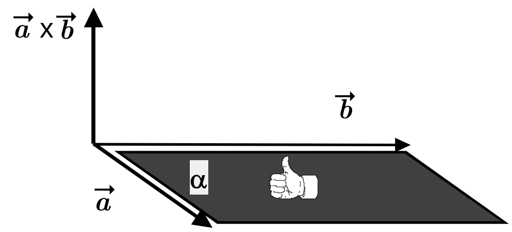
$$\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}.$$

2.4.14. Producto vectorial de dos vectores

Se define el producto cruz o vectorial $\vec{a}\times\vec{b}$ de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como un vector de magnitud

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin\alpha=ab\sin\alpha, \tag{2.11}$$

que corresponde al área del paralelógramo que los dos vectores forman, de dirección perpendicular al plano de los dos vectores y de sentido dado por la regla de la mano derecha o del tornillo diestro, como se indica en la figura. El ángulo α es el ángulo que forman las direcciones de los dos vectores. (Note que $\sin\alpha=\sin(180-\alpha)$).



En la expresión del producto vectorial $\vec{a} \times \vec{b}$, la parte del vector $\vec{a}$ paralela al vector $\vec{b}$ no contribuye. Contribuye sólo la parte del vector $\vec{a}$ que es perpendicular a $\vec{b}$ que en la figura que sigue se indica por $\vec{a}_b$, es decir

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}_b \times \vec{b}, \tag{2.12}$$

que se ilustra en la figura y donde $\vec{a}_b$ indica la parte de el vector $\vec{a}$ que es perpendicular a $\vec{b}$.

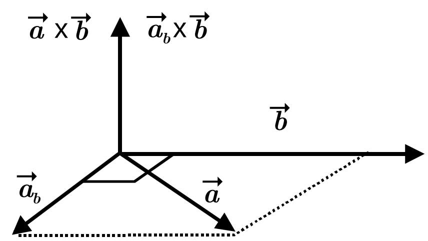


Figura 2.8:

2.4.15. Distributividad del producto cruz respecto a la suma

Para establecer la propiedad

$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}, \tag{2.13}$$

Consideraremos un vector unitario $\hat{c}$ y tomemos las partes de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ que son perpendiculares a $\hat{c}$ y que se han indicado en la figura que sigue por $\vec{a}_c$ y $\vec{b}_c$. Está tambien el vector $\overrightarrow{OB}$ que es la suma vectorial $\vec{a}_c + \vec{b}_c$. Estos tres vectores están todos sobre un plano perpendicular a $\hat{c}$ que hemos llamado plano Σ. Multiplicar esos tres vectores vectorialmente por $\hat{c}$ simplemente rota ese triángulo OAB en 90^o sobre ese mismo plano llegando a ser el triángulo $OA'B'$. En ese triángulo rotado, evidentemente está representado que

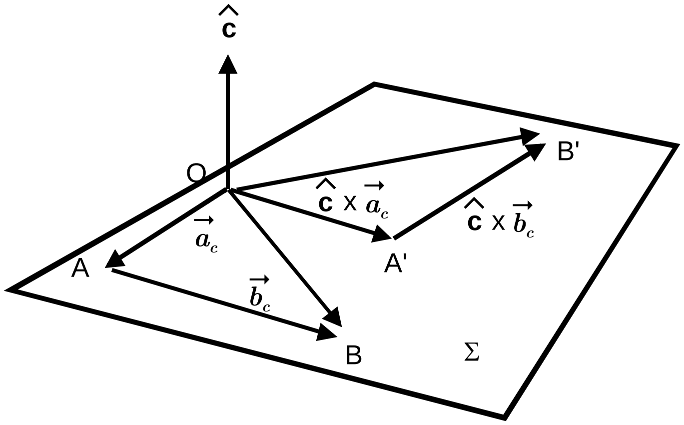


Figura 2.9:

$$\hat{c} \times \vec{a}_c + \hat{c} \times \vec{b}_c = \hat{c} \times (\vec{a}_c + \vec{b}_c), \tag{2.14}$$

Pero $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se pueden descomponer en partes paralelas y perpendiculares a $\hat{c}$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{a} \cdot \hat{c}\hat{c} + \vec{a}_c, \\ \vec{b} &= \vec{b} \cdot \hat{c}\hat{c} + \vec{b}_c \end{aligned}$$

de modo que

$$(\vec{a} + \vec{b}) = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \hat{c}\hat{c} + \vec{a}_c + \vec{b}_c,$$

de donde es claro que

$$(\vec{a} + \vec{b})_c = \vec{a}_c + \vec{b}_c.$$

Por lo tanto (2.14) puede escribirse

$$\hat{c} \times \vec{a}_c + \hat{c} \times \vec{b}_c = \hat{c} \times (\vec{a} + \vec{b})_c,$$

Multiplicando por $|\vec{c}|$ y considerendo (2.12) se transforma en

$$\vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b} = \vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}).$$

2.4.16. Algunas propiedades

Pueden establecerse algunas propiedades básicas

$$
\begin{aligned}
\vec{a}+\vec{b} &= \vec{b}+\vec{a}, \\
\vec{a}\cdot\vec{b} &= \vec{b}\cdot\vec{a}, \\
\vec{a}\times\vec{b} &= -\vec{b}\times\vec{a} \\
(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} &= \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}), \\
(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} &= \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}, \\
(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} &= \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}, \\
(-1)\vec{a}+\vec{a} &= \vec{0}, \\
\vec{a}+\vec{0} &= \vec{a}, \\
\lambda\vec{0} &= \vec{0}.
\end{aligned}
$$

Al vector $(-1)\vec{a}$ lo denotaremos simplemente $-\vec{a}$, es decir

$$(-1)\vec{a} = -\vec{a}.$$

2.4.17. Algunas operaciones en términos de las componentes

Puede establecerse que

$$
\begin{aligned}
|\vec{a}| &= a = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}, \\
\vec{a}\cdot\vec{b} &= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \\
\vec{a}\pm\vec{b} &= (a_x\pm b_x)\hat{\imath}+(a_y\pm b_y)\hat{\jmath}+(a_z\pm b_z)\hat{k}, \\
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_yb_z-a_zb_y)\hat{\imath}+(a_zb_x-a_xb_z)\hat{\jmath}+(a_xb_y-a_yb_x)\hat{k} \\
&= (a_yb_z-a_zb_y, a_zb_x-a_xb_z, a_xb_y-a_yb_x).
\end{aligned}
$$

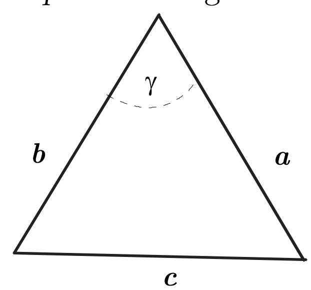
Note que la última relación corresponde al desarrollo del determinante

$$\vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{bmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

2.4.18. Relación con geometría

Existen muchas relaciones geométricas que se demuestran en forma muy simple utilizando las propiedades de los vectores. Por ejemplo demostraremos algunos teorema.

▶ Teorema 2.1
Teorema del coseno. Con respecto a la figura el teorema establece que



$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}.$$

Demostracion 1 *Considere el triángulo de la figura 2.10 (a)entonces tenemos que la magnitud del lado opuesto al ángulo* $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ *estará dado por*

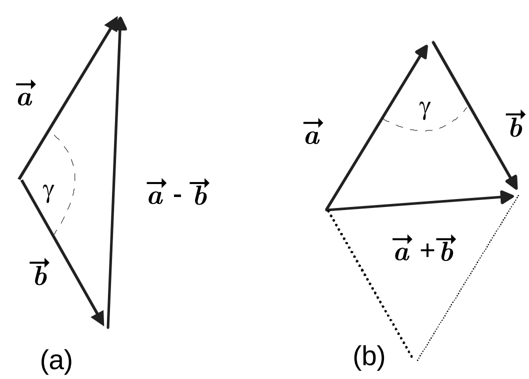


Figura 2.10:

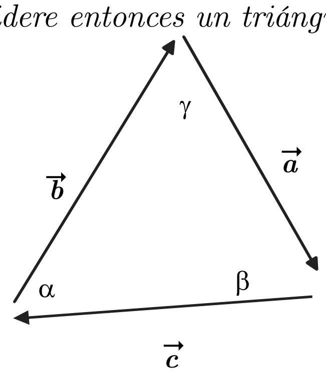
$$\begin{aligned}\left|\vec{a}-\vec{b}\right| &= \sqrt{(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})},\\ &= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}.\end{aligned}$$

Forma alternativa. El mismo resultado se obtiene de considerar la figura 2.10 (b) pero ahora

$$\begin{aligned}\left|\vec{a}+\vec{b}\right| &= \sqrt{(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})},\\ &= \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(180-\gamma)},\\ &= \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}.\end{aligned}$$

► TEOREMA 2.2
Teorema del seno. El teorema del seno establece que los senos de los ángulos de un triángulo son proporcionales a los lados opuestos a los ángulos.

DEMOSTRACION 2 *Considere entonces un triángulo*



Evidentemente

$$\vec{b}\times\vec{a}=\vec{c}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c},$$

pues tenemos en los tres casos la misma dirección, mismo sentido e igual magnitud, el doble del área del mismo triángulo. Si tomamos las magnitudes

$$ab\sin\gamma = ac\sin\beta = cb\sin\alpha,$$

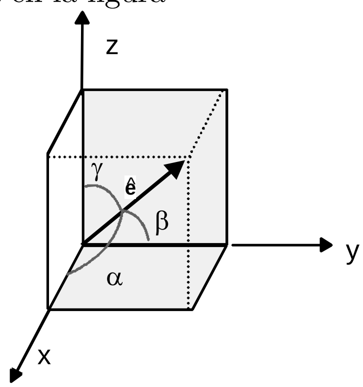
luego dividimos estas ecuaciones por abc conduce al teorema del seno.

$$\frac{\sin\gamma}{c}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\alpha}{a}.$$

Aquí hemos usado la notación $a=|\vec{a}|$, $b=\left|\vec{b}\right|$ y $c=|\vec{c}|$.

2.4.19. Cosenos directores

Considere un vector $\hat{e}$ unitario que forma los ángulos α, β, γ con los ejes X, Y, Z, como se indica en la figura



cosenos directores

entonces

$$\hat{e} = \cos\alpha\hat{\imath} + \cos\beta\hat{\jmath} + \cos\gamma\hat{k},$$

si hacemos

$$\hat{e}\cdot\hat{e} = 1,$$

se obtiene

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

La relación fundamental que cumplen los cosenos directores de una dirección cualquiera.

2.4.20. Ecuación de un plano

De acuerdo a la figura (2.11), la ecuación de un plano que es perpendicular a una dirección $\hat{n}$ y que pasa a una distancia d del origen puede escribirse

$$\vec{r}\cdot\hat{n} = d,$$

esto es, todos los puntos del plano, dan la misma proyección sobre la dirección del vector unitario normal, la distancia d al origen. La forma cartesiana de la ecuación de un plano será

$$Ax + By + Cz = D,$$

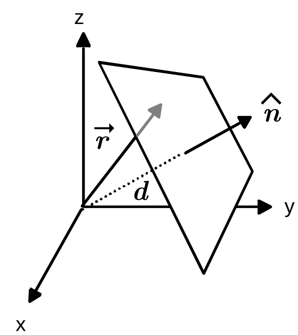


Figura 2.11: un plano

y comparando con la forma anterior se deduce que

$$\begin{aligned} n_x &= \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ n_y &= \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ n_z &= \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ d &= \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2.4.1 *Determine un vector unitario normal y la distancia del siguiente plano al origen*

$$2x - 3y + 2z = 5,$$

Solución. Usando lo anterior

$$n_x = \frac{2}{\sqrt{17}},\ n_y = \frac{-3}{\sqrt{17}},\ \ n_z = \frac{2}{\sqrt{17}},\ \ d = \frac{5}{\sqrt{17}}.$$

▲

2.4.21. Volumen de un paralelepipedo

Si un paralelepípedo tiene sus aristas de acuerdo a las direcciones y magnitudes de $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$, su volumen está dado por

$$V = \left|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}\right|,$$

el llamado producto triple o mixto. La razón es que $\vec{a} \times \vec{b}$ puede escribirse como el área A del paralelógramo basal por un vector unitario a lo largo de la dirección perpendicular a esa área

$$\vec{a} \times \vec{b} = A\hat{n},$$

entonces

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = A\hat{n} \cdot \vec{c} = \pm Ah,$$

la base por la altura. La razón de tomar el módulo es porque $\hat{n}$ puede dar producto punto negativo con $\vec{c}$.

2.4.22. Ángulo que forman dos vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$

De acuerdo a las dos versiones establecidas para el producto escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

y

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\alpha = ab\cos\alpha,$$

se deduce que

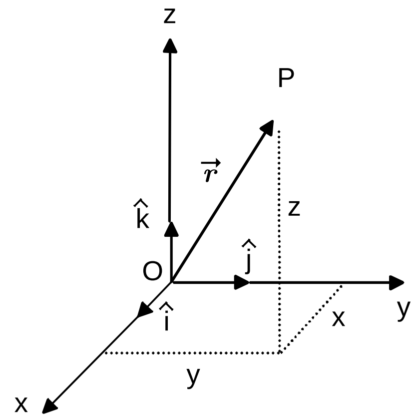
$$\cos\alpha = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.16}$$

2.5. Más sobre sistemas de referencia

Mediante la utilización de vectores, se definen vectores unitarios básicos de acuerdo a cada sistema de referencia, de manera que en primer lugar, la posición de los puntos se hace mediante un vector, llamado vector posición, que es expresado en términos de los vectores unitarios básicos, como explicaremos, y en segundo lugar ello permitirá en los próximos capítulos calcular con simplicidad la velocidad y aceleración de puntos. Los vectores unitarios básicos usualmente se eligen ortogonales entre sí (formando ángulos rectos).

2.5.1. Sistema cartesiano

Como ya se explicó se definen los vectores unitarios cartesianos básicos $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ paralelos y en el sentido de los ejes, como se ilustra en la figura, de manera que el vector posición del punto P está dado por

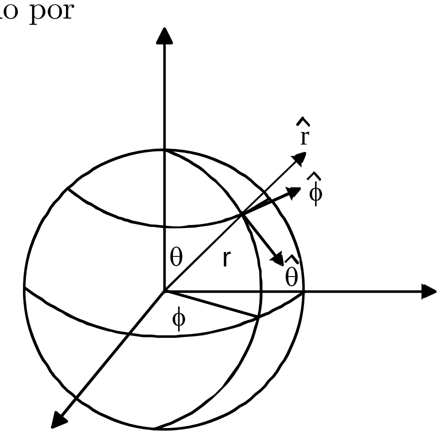


vectores unitarios cartesianos

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}. \tag{2.17}$$

2.5.2. Sistema esférico de coordenadas

En el sistema esférico de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ se indican en la figura de manera que el vector posición del punto P está dado por

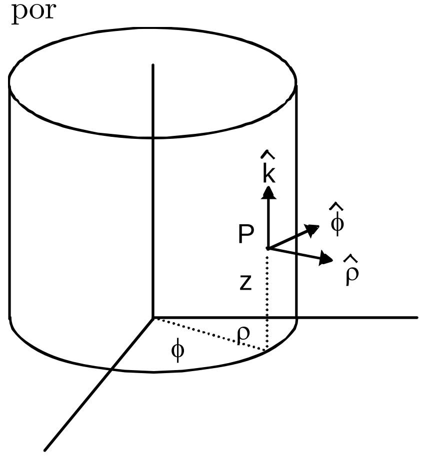


vectores unitarios esféricos

$$\vec{r} = r\hat{r}. \tag{2.18}$$

2.5.3. Sistema cilíndrico de coordenadas

En el sistema cilíndrico de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ y $\hat{k}$ se indican en la figura de manera que el vector posición del punto P está dado por



vectores unitarios cilíndricos

$$\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}. \tag{2.19}$$

2.5.4. Sistema polar de coordenadas

En el sistema polar de coordenadas, los vectores unitarios básicos denominados $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ se indican en la figura de manera que el vector posición del punto P está dado por

$$\vec{r} = r\hat{r}. \tag{2.20}$$

2.5.5. Relaciones entre los vectores unitarios

Es tarea sencilla establecer las siguientes relaciones entre los vectores unitarios para los diversos sistemas recién descritos

- Cartesiano-esférico

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \sin\theta\cos\phi\hat{\imath} + \sin\theta\sin\phi\hat{\jmath} + \cos\theta\hat{k}, \qquad (2.21)\\
\hat{\theta} &= \cos\theta(\cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{\jmath}) - \sin\theta\hat{k},\\
\hat{\phi} &= -\sin\phi\hat{\imath} + \cos\phi\hat{\jmath}.
\end{aligned}$$

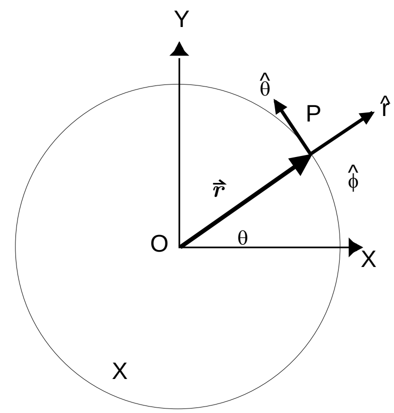


Figura 2.12: Vectores unitarios polares.

- Cartesiano-cilíndrico

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \cos\phi\hat{\imath} + \sin\phi\hat{\jmath}, \\ \hat{\phi} &= -\sin\phi\hat{\imath} + \cos\phi\hat{\jmath}, \\ \hat{k} &= \hat{k}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

- Polar-cartesiano

$$\begin{aligned} \hat{r} &= \cos\theta\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}, \\ \hat{\theta} &= -\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath} \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.5.6. Componentes de un vector

En general todo vector $\vec{A}$ puede ser expresado en cualquier sistema de vectores unitarios ortogonales de modo que

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \\ &= A_r\hat{r} + A_\theta\hat{\theta} + A_\phi\hat{\phi} \\ &= A_\rho\hat{\rho} + A_\phi\hat{\phi} + A_z\hat{k}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Las diversas componentes del vector $\vec{A}$ están relacionadas y en general la forma de obtener una componente cualquiera es mediante la operación de proyección realizada mediante el producto escalar

$$A_n = \vec{A} \cdot \hat{n}. \tag{2.25}$$

2.6. De actualidad (No incluido en el, programa)

El concepto de vector que se generó mediante una generalización del simple concepto de desplazamiento y las formas en que los desplazamientos se combinan ha debido en algunos casos abandonarse y en otros casos generalizarse. El concepto de vector realmente tiene aplicabilidad e importancia en los llamados espacios planos o Euclideanos. En espacios curvos es complejo sino imposible hablar de dirección, puesto que dirección es un conjunto de líneas paralelas. ¿Qué son líneas paralelas en un espacio curvo, por ejemplo la superficie de una esfera?

En un espacio plano si se hacen tres desplazamientos paralelos regresando al punto de partida, el cuerpo queda tal como empezó. En un espacio curvo no ocurre eso. En la formulación de su teoría de la Relatividad General Albert Einstein que involucra espacio-tiempo curvo, se ve obligado a utilizar "Tensores"para su formulación. En la vecindad de cada punto del espacio tiempo, allí este se puede aproximar por un espacio tiempo plano y allí podríamos usar vectores. Como un ejemplo de lo que hablamos, en un espacio plano una partícula libre se mueve de acuerdo a

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) + \vec{v}t.$$

Si se trata del movimiento de una partícula en un espacio tiempo curvo las cosas son diferentes. Primero, el espacio tiempo tiene una curvatura causada por la presencia de cuerpos con masa. Una partícula movíendose no sometida a alguna de las otras tres fuerzas (electromagnética, nuclear o débil), partícula en caida libre, define lo que se denomina sistema inercial de referencia. La partícula se moverá en una geodésica del espacio tiempo. Si se usa como parámetro la longitud de arco s la ecuación de movimiento establecida por Einstein es

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\gamma}{ds} = 0,$$

donde x^α , son cordenadas espaciales $\alpha = 1, 2, 3$. Además

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{\partial^2\bar{x}^l}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^l} = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}),$$

son los símbolos de *Christoffel* y el elemento de arco ds^2 define al tensor de la métrica

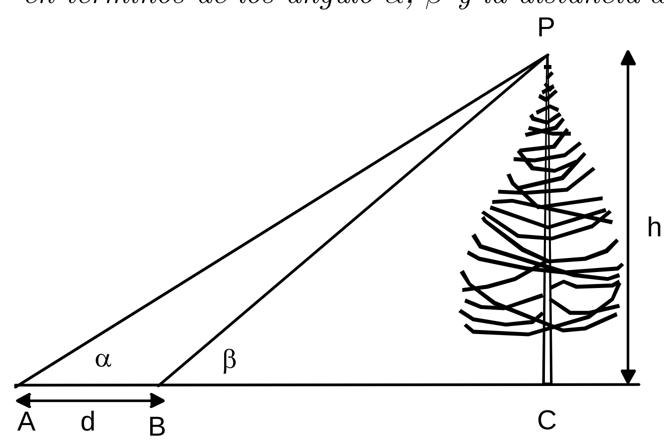
$$ds^2 = -g_{\mu\upsilon}d\xi^\mu d\xi^\nu.$$

En un espacio tiempo plano, $g_{\mu\upsilon} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$, se obtiene $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$ y

$$\frac{d^2x^\alpha}{ds^2} = 0.$$

2.7. Aplicaciones

Ejemplo 2.7.1 *Para la situación indicada en la figura, determine la altura h del punto P en términos de los ángulo α, β y la distancia d.*



Solución. Podemos escribir

$$\tan\alpha = \frac{h}{AC}, \quad \tan\beta = \frac{h}{BC},$$

de donde

$$AC = \frac{h}{\tan\alpha}, \quad BC = \frac{h}{\tan\beta},$$

y restando

$$d = AC - BC = \frac{h}{\tan\alpha} - \frac{h}{\tan\beta},$$

de donde sigue el resultado

$$h = \frac{d}{\frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1}{\tan\beta}} = \frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta - \tan\alpha} d.$$

▲

2.8. Ejercicios

EJERCICIO 2.1 *Demuestre las identidades*

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}.$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^2 = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2.$$

EJERCICIO 2.2 *Si los lados de un triángulo son a, b, c determine los ángulos del triángulo.*

EJERCICIO 2.3 *Considere los puntos cuyas coordenadas son $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 1)$, $C = (-1, 2, 0)$ determine*

a) El área del triángulo ABC.

b) Los ángulos del triángulo ABC.

c) Las magnitudes de los lados del triángulo ABC.

d) Las alturas del triángulo ABC.

EJERCICIO 2.4 *Considere un paralelógramo donde se dan tres vértices $A = (0, 1, 1)$, $B = (1, 0, 1)$, $C = (1, 1, 0)$.*

a) Determine el cuarto vértice.

b) Determine el área del paralelógramo.

c) Determine las longitudes de las diagonales.

EJERCICIO 2.5 *Escriba la ecuación de un plano que es perpendicular a la dirección $\hat{n} = (1, -1, 1)/\sqrt{3}$ y que pasa a distancia 3 del origen.*

EJERCICIO 2.6 *Sea una recta*

$$\begin{aligned} x &= 2t + 1, \\ y &= -t + 2, \\ z &= 3t - 1, \end{aligned}$$

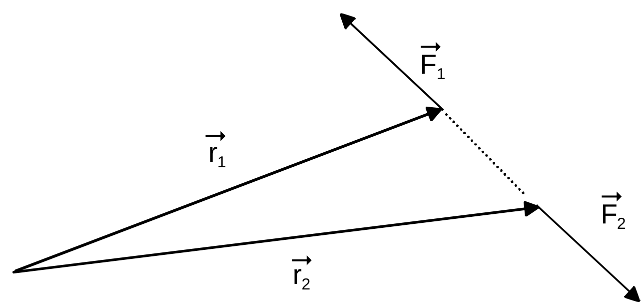
siendo t un parámetro. Determine su distancia al origen.

EJERCICIO 2.7 *Sean* $\vec{a} = (1, 1, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, 1)$ *dos vectores. Determine la ecuación de un plano que pase por el origen y que contenga los vectores* $\vec{a}$ *y* $\vec{b}$.

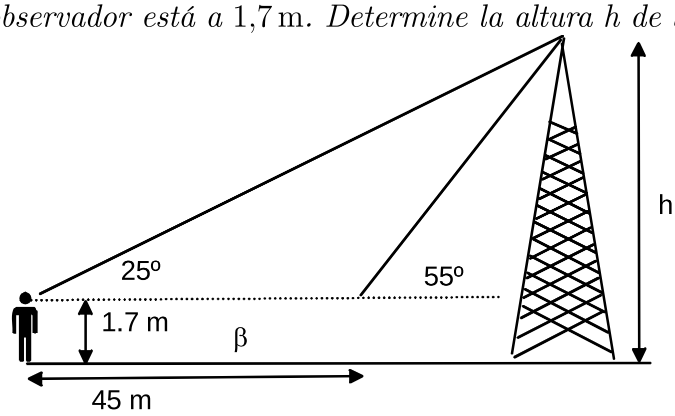
EJERCICIO 2.8 *Determine el área de un triángulo en función solamente de sus lados* a, b *y* c.

EJERCICIO 2.9 *Con relación a la figura, demuestre que si* $\vec{F_1} = -\vec{F_2}$ *entonces:*

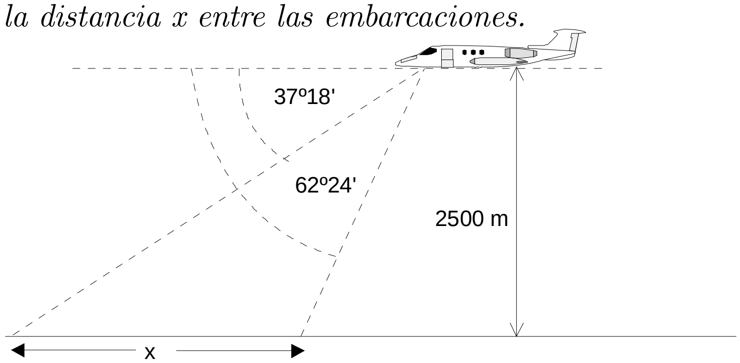
$$\vec{r}_1 \times \vec{F_1} + \vec{r}_2 \times \vec{F_2} = \vec{0}.$$



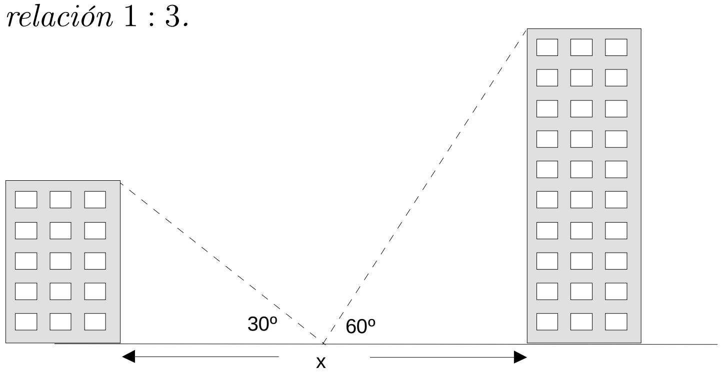
EJERCICIO 2.10 *Desde una determinada posición en un camino, una persona observa la parte más alta de una torre de alta tensión con un ángulo de elevación de* 25^o. *Si avanza* $45\,\mathrm{m}$ *en línea recta hacia la base de la torre, divisa la parte más alta con un ángulo de elevación de* 55^o. *Considerando que la vista del observador está a* $1{,}7\,\mathrm{m}$. *Determine la altura* h *de la torre.*



Ejercicio 2.11 *Desde un avión de reconocimiento que vuela a una altura de* $2500\,\mathrm{m}$*, el piloto observa dos embarcaciones que se encuentran en un mismo plano vertical con ángulos de depresión de* $62^o24'$ *y* $37^o18'$ *respectivamente. Encuentre la distancia* x *entre las embarcaciones.*



Ejercicio 2.12 *Una persona se encuentra en la mitad de la distancia que separa dos edificios y observa la parte más alta de éstos con ángulos de elevación de* 30^o *y* 60^o *respectivamente. Demuestre la que las alturas de los edificios están en la relación* $1:3$.



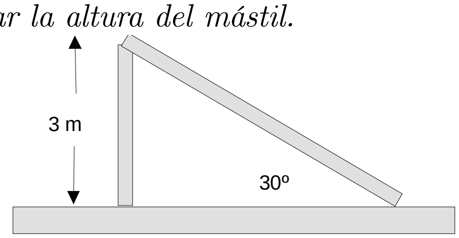
Solución. Si las alturas son llamadas h_1 y h_2 tenemos que

$$\begin{aligned} \tan 30 &= \frac{h_1}{x/2}, \\ \tan 60 &= \frac{h_2}{x/2}, \end{aligned}$$

de donde

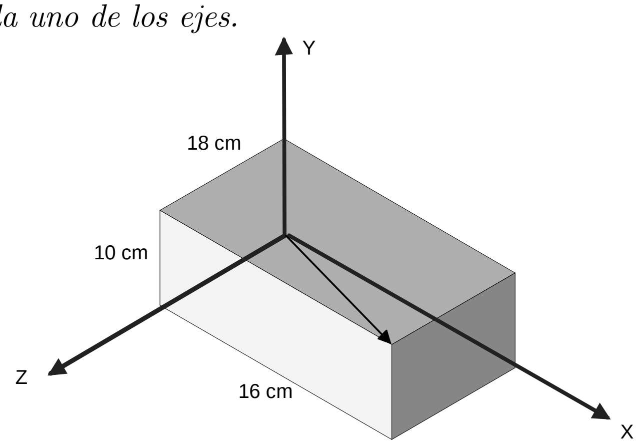
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\tan 30}{\tan 60} = \frac{\frac{1}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 2.13 *Un mástil por efecto del viento se ha quebrado en dos partes, la parte que quedó vertical en el piso mide* $3\,\mathrm{m}$ *y la parte derribada quedó atada al extremo superior de la parte vertical, formando un ángulo de* 30^o *con el piso. Encontrar la altura del mástil.*



Ejercicio 2.14 *Una persona en su trote diario, desde su casa, corre* $7\,\mathrm{km}$ *al Norte,* $2\,\mathrm{km}$ *al Oeste,* $7\,\mathrm{km}$ *al Norte y* $11\,\mathrm{km}$ *al Este. Encuentre la distancia a su casa a que se encuentra la persona .*

Ejercicio 2.15 *Una caja tiene* $16\,\mathrm{cm}$ *de largo,* $18\,\mathrm{cm}$ *de ancho y* $10\,\mathrm{cm}$ *de alto. Encuentre la longitud de la diagonal de la caja y el ángulo que ésta forma con cada uno de los ejes.*



Ejercicio 2.16 *Dados los vectores* $\vec{r}_1 = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{r}_2 = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{r}_3 = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, *hallar los módulos de:*

a) $\vec{r}_3$

b) $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3$

c) $2\vec{r}_1 - 3\vec{r}_2 + 5\vec{r}_3$

EJERCICIO 2.17 *Hallar un vector unitario con la dirección y sentido de la resultante de* $\vec{r}_1 + \vec{r}_2$, *con* $\vec{r}_1 = 2\hat{\imath} + 42\hat{\jmath} - 5\hat{k}$, $\vec{r}_2 = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 3\hat{k}$,

EJERCICIO 2.18 *Demostrar que los vectores* $\vec{A} = 3\hat{\imath}+\hat{\jmath}-2\hat{k}$, $\vec{B} = -\hat{\imath}+3\hat{\jmath}+4\hat{k}$, $\vec{C} = 4\hat{\imath}-2\hat{\jmath}-6\hat{k}$, *pueden ser los lados de un triángulo, y hallar las longitudes de las medianas de dicho triángulo.*

EJERCICIO 2.19 *Hallar el ángulo formado por los vectores* $\vec{A} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} - \hat{k}$, $\vec{B} = 6\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$.

EJERCICIO 2.20 *Demostrar que los vectores* $\vec{A} = 3\hat{\imath}-2\hat{\jmath}+\hat{k}$, $\vec{B} = \hat{\imath}-3\hat{\jmath}+5\hat{k}$, $\vec{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 4\hat{k}$, *forman un triángulo rectángulo.*

EJERCICIO 2.21 *Hallar el vector unitario perpendicular al plano formado por* $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{B} = 4\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - \hat{k}$.

EJERCICIO 2.22 *Dados ,* $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} - \hat{k}$ *y* $\vec{B} = \hat{\imath} + 4\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ *determinar*

a) $\vec{A} \times \vec{B}$

b) $\vec{B} \times \vec{A}$

c) $(\vec{A} + \vec{B}) \times (\vec{A} - \vec{B})$

EJERCICIO 2.23 *Hallar el área del triángulo cuyos vértices son* $P(1, 3, 2)$, $Q(2, -1, 1)$, $R(1, 2, 3)$.

EJERCICIO 2.24 *Hallar los ángulos agudos formados por la recta que une los puntos* $(1, -3, 2)$ *y* $(3, -5, 1)$ *con los ejes coordenados.*

EJERCICIO 2.25 *Hallar los cosenos directores de la recta que pasa por los puntos* $(3, 2, -4)$ *y* $(1, -1, 2)$.

EJERCICIO 2.26 *Dos lados de un triángulo son los vectores* $\vec{A} = 3\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} - 2\hat{k}$ *y* $\vec{B} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$. *Hallar los ángulos del triángulo.*

EJERCICIO 2.27 *Las diagonales de un paralelogramo son* $\vec{A} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}$ *y* $\vec{B} = 2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 6\hat{k}$ *. Demostrar que dicho paralelogramo es un rombo y hallar sus ángulos y la longitud de sus lados.*

EJERCICIO 2.28 *Hallar la proyección del vector* $2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 6\hat{k}$ *sobre el vector* $\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ *.*

EJERCICIO 2.29 *Hallar la proyección del vector* $4\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$ *sobre la recta que pasa por los puntos* $(2, 3, -1)$ *y* $(-2, -4, 3)$*.*

EJERCICIO 2.30 *Si* $\vec{A} = 4\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 3\hat{k}$ *y* $\vec{B} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}$ *, hallar un vector unitario perpendicular al plano de* $\vec{A}$ *y* $\vec{B}$*.*

EJERCICIO 2.31 *Demostrar que* $\vec{A} = \frac{2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}}{3}$, $\vec{B} = \frac{\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}}{3}$, *y* $\frac{\vec{C} = 2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 2\hat{k}}{3}$ *son vectores unitarios mutuamente perpendiculares.*